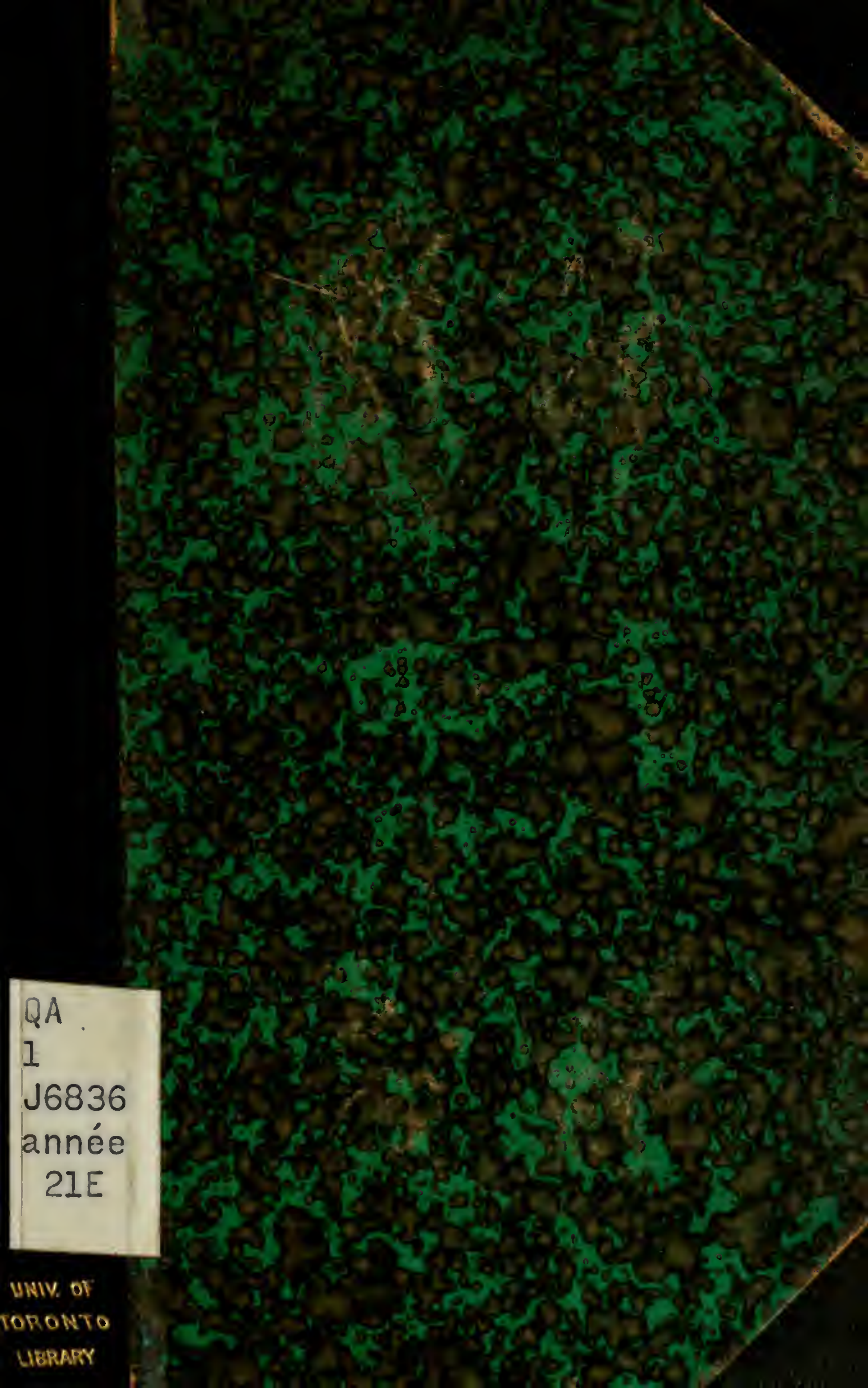

QA
1
J6836
année
21E
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

PUBLICATION FONDÉE EN 1877 PAR M. BOURGET

5me SÉRIE

VINGT-ET-UNIÈME ANNÉE



N° 1. — Janvier 1897.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1896; p. 265)

28. — Lemme. *Toute droite passant par un des points d'intersection de deux circonférences les rencontre de nouveau en deux points dont les diamètres se coupent sous le même angle que les circonférences.*

Soient B, C (*fig.* 13) les points où deux circonférences de centres O et O' sont rencontrées de nouveau par une droite contenant un de leurs points d'intersection A ; l'angle BDC des deux diamètres BO, CO' sera égal à celui des deux rayons OA, $O'A$. En effet, le premier est supplémentaire de la somme des angles OBA, $O'CA$, et, le second, de celle des angles OAB, $O'AC$.

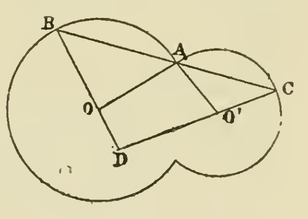


Fig. 13

Lorsque les deux circonférences seront orthogonales, les diamètres BO, CO' seront perpendiculaires entre eux.

29. — Lemme. *Si deux cercles en coupent un troisième orthogonalement et suivant des cordes parallèles, leurs centres de similitude coïncident avec ceux des cercles décrits sur ces cordes comme diamètres, la coïncidence se faisant d'un centre de similitude directe avec un sens de similitude inverse.*

Soient, sur une même droite, les centres O, C, C' (*fig.* 14) de trois circonférences dont la seconde et la troisième ont, pour rayons, les tangentes CA et $C'A'$ menées à la première. Il s'agit

de montrer que les centres de similitude des deux dernières circonférences s'appliquent sur ceux des cercles qui ont pour diamètres les cordes communes AB, $A'B'$.

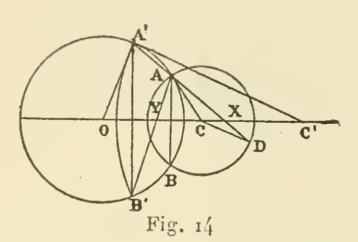


Fig. 14

Ces deux derniers centres de similitude se trouvent en X et Y, à la rencontre de CC' avec $A'A$ et avec AB'. Soit D le second point d'intersection de $A'A$ avec la circonférence de centre C ; tirons CD et OA'.

D'après le lemme précédent appliqué aux deux circonférences de centres O et C et à la droite $A'D$, qui passe par un de leurs points d'intersection A, CD sera perpendiculaire à OA', et, par conséquent, parallèle à $C'A'$. Les rayons CD, $C'A'$ des deux circonférences de centres C et C' étant ainsi parallèles et dirigés en sens contraires, DA' contiendra le centre de similitude inverse de ces deux circonférences ; il se trouvera donc en X. On démontrerait d'une manière analogue que le centre de similitude directe est en Y.

30. — *Si l'on décrit des circonférences ayant chacune pour diamètre la distance des centres de similitude de deux cercles bi-tangents, l'axe non focal de la conique sera l'axe radical commun de toutes ces circonférences prises deux à deux, et les foyers seront les nœuds de l'une quelconque d'entre elles par rapport à cet axe.*

Le point O étant le centre de la conique, F et F' les foyers, décrivons la circonférence de centre O et de rayon OF.

Si la conique est une ellipse, en menant, par les centres H, H' (*fig.* 15) des deux cercles bi-tangents, les cordes GG_1, $G'G'_1$ perpendiculaires à FF', et joignant leurs extrémités, nous obtiendrons, en X, Y, les centres de similitude, car les rayons des deux cercles sont proportionnels à HG, $H'G'$ [18]. Or, d'après ces constructions, Y est la polaire

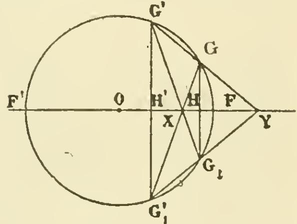


Fig. 15

de X par rapport à la circonférence $FGG'F'$; donc X, Y sont conjugués harmoniques de F, F'. De là résultent les conséquences suivantes : on a $OX.OY = c^2$; la circonférence $FGG'F'$ coupe orthogonalement le cercle qui serait décrit sur XY comme diamètre et tous les cercles analogues; les tangentes menées de O à ces cercles sont égales à c; pris deux à deux, ils ont, pour axe radical, la perpendiculaire élevée en O sur FF'; enfin, par rapport à cette perpendiculaire, les nœuds de l'un quelconque d'entre eux sont F et F'. On peut encore remarquer que le rayon de chacun de ces cercles est moyenne proportionnelle entre les distances de son centre aux foyers.

Si la conique est une hyperbole, les rayons des cercles bi-tangents seront proportionnels aux tangentes HG, $H'G'$ (*fig.* 16) menées des centres H, H' à la circonférence décrite sur FF' comme diamètre [**18**], de sorte que les centres de similitude seront les mêmes que ceux des cercles de centres H,H' et de rayons HG, $H'G'$. Or, ces derniers coupant la circonférence $FGG'F'$ orthogonalement et suivant des cordes parallèles GG_1, $G'G'_1$, leurs centres de similitude coïncident avec ceux des cercles décrits sur ces cordes comme diamètres [**29**]. On se trouve ainsi ramené au cas précédent.

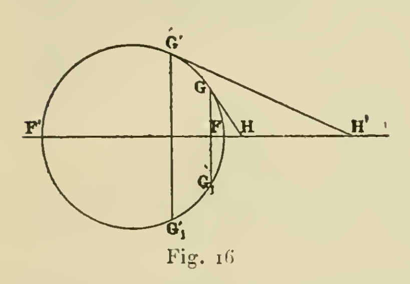


Fig. 16

Le foyer de la parabole est équidistant des centres de similitude de deux quelconques des cercles bi-tangents. En effet, F,F' (*fig.* 15) étant conjugués harmoniques de X, Y, si F' s'éloigne à l'infini, F se placera au milieu de XY.

31. — Etant donnée une moitié d'ellipse limitée par le petit axe, ou une branche d'hyperbole, ou une parabole, imaginons que le centre H d'un cercle bi-tangent, placé sur le prolongement de la droite qui joint le sommet A au foyer F, vienne à se déplacer en se dirigeant dans le sens FA. Le saillant S, conjugué harmonique de H par rapport à F, F' se dirigera en sens contraire, et la droite des contacts, polaire de S par rapport au cercle

principal, marchera à la rencontre de S, c'est-à-dire dans le même sens que H. La rencontre se fera en A, avant que H n'arrive au foyer ; on aura alors [22]

$$k = a, \quad h = \frac{c^2}{a}, \quad \tau = \delta = \frac{b^2}{a} = p,$$

p désignant le paramètre de la conique. Le cercle bi-tangent sera le cercle osculateur en A.

Ensuite, il n'y aura plus, à proprement parler, de cercle bi-tangent, puisque la droite sur laquelle devraient s'effectuer les contacts ne rencontrera plus ni le cercle ni la conique. Néanmoins, aux divers points de l'axe compris entre le centre du cercle osculateur et le foyer, correspondent encore des cercles, ou des droites, jouissant des propriétés ci-dessus établies ; nous allons maintenant nous occuper de ces cercles, parce qu'ils se présentent d'eux-mêmes dans la résolution et la discussion des problèmes sur les cercles bi-tangents aux coniques. (*A suivre*).

DEUX PROBLÈMES GÉNÉRAUX
DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Ch. Michel,** élève à l'École Normale supérieure.

Considérons un couple de points A_n et B_n. Si P et Q sont deux points du plan, nous désignerons par ω_n l'angle aigu des droites A_nP et B_nQ et par λ_n le rapport des longueurs A_nP et B_nQ.

On peut résoudre par une méthode très simple le problème général suivant :

I. — *Étant donnés trois couples de points* A_1 *et* B_1, A_2 *et* B_2, A_3 *et* B_3, *trouver deux points* P *et* Q, *connaissant les nombres* ω_1 *et* λ_1 *et deux quelconques des quatre autres nombres* ω_2 *et* λ_2, ω_3 *et* λ_3. — Chacun des couples peut se réduire à un point double et les deux couples A_2 et B_2, A_3 et B_3 peuvent être confondus.

Supposons le problème résolu, et construisons le triangle $B_1Q\alpha_2$, semblable au triangle A_1PA_2 et semblablement orienté. L'angle des droites A_1A_2 et $B_1\alpha_2$ est égal à ω_1 et le rapport des longueurs A_1A_2 et $B_1\alpha_2$ est égal à λ_1. La position du point α_2 est donc connue. Il y a quatre positions du point α_2.

La droite α_3Q fait avec la droite A_2P l'angle ω_1 ; d'ailleurs, la droite B_2Q fait avec cette même droite l'angle ω_2. Donc, l'un des angles θ_2 des deux droites α_2Q et B_2Q est égal à la somme ou à la différence des angles ω_1 et ω_2.

D'autre part, on a

$$\frac{A_2P}{\alpha_2Q} = \lambda.$$

Mais

$$\frac{A_2P}{B_2Q} = \lambda_2 ;$$

par suite

$$\rho_2 = \frac{\alpha_2Q}{B_2Q} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

De même, construisons le triangle $B_1Q\alpha_3$, semblable au triangle A_1PA_3 et semblablement orienté. L'angle θ_3 des droites α_3Q et B_3Q est égal à la somme ou à la différence des angles ω_1 et ω_3, et l'on a

$$\rho_3 = \frac{\alpha_3Q}{B_3Q} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}.$$

Il y a quatre positions du point α_3 ; mais, à une position du point α_2, correspond une seule position du point α_3.

On voit ainsi que si les deux nombres ω_1 et λ_1 et si deux des quatre nombres ω_2, λ_2, ω_3, λ_3 sont connus, deux des nombres θ_2, θ_3, ρ_2, ρ_3 le sont aussi. Un lieu de Q, si l'un des deux nombres θ_2 et θ_3 est donné, se compose de deux circonférences passant par les points B_2 et α_2 ou B_3 ou α_3, et, si c'est l'un des deux autres, d'une circonférence. Le point Q s'obtient en définitive par l'intersection de deux circonférences. On déduit bien facilement la position du point P de celle du point Q. Remarquons que tout point Q, ainsi obtenu, n'est pas nécessairement une solution du problème.

Un autre problème général est le suivant :

II. — *Étant donnés deux couples de points* A_1, B_1, *et* A_2, B_2, *trouver deux points* P *et* Q, *connaissant les nombres* ω_1 *et* λ_1, *l'un des nombres* ω_2 *et* λ_2 *et sachant que le point* Q *est sur une ligne donnée.*

On connait encore dans ce problème l'un des deux nombres θ_2

et ρ_2 et ainsi un second lieu du point Q qui se compose ou d'une circonférence ou de deux circonférences.

Voici des cas particuliers qui ont déjà été traités par divers auteurs.

1° Supposons que les points A_1, B_1 soient confondus en un point O et que la ligne qui contient le point Q soit une circonférence, ayant le point O pour centre. Nous avons alors les deux problèmes suivants :

On donne deux points A_2 *et* B_2. *Un triangle* OPQ *tourne autour de son sommet* O *fixe, et l'on demande de placer ce triangle de façon que l'angle des droites* PA_1 *et* QB_1 *soit égal à un angle donné ou de façon que le rapport des longueurs* PA_1 *et* QB_1 *soit égal à un rapport donné.* Ce sont les deux problèmes dont M. Girardville a donné, ici même, en juillet 1893, une solution.

2° Supposons que le point P soit assujetti à être sur une droite passant par A_2. Alors Q est sur une droite connue passant par B_1. Supposons, d'autre part, que les points A_2 et B_2 soient confondus en un point O. On a alors le problème suivant qui constitue la question 2 477 du journal de M. Vuibert (année 1890) :

On donne un angle et deux points A_1 *et* B_1 *sur les deux côtés de cet angle. Placer un segment* PQ *limité aux côtés de l'angle, de façon que le rapport* $\frac{A_1P}{B_1Q}$ *soit égal à une quantité donnée et que l'angle sous lequel on le voit, d'un point donné* O, *soit égal à un angle donné.*

3° Supposons enfin que A_1 et B_1 soient confondus en un point O et que P soit assujetti à être sur une droite passant par ce point. Alors Q est assujetti à être aussi sur une autre droite connue, passant par O, et l'on a l'énoncé de la question 2 494 du même journal (année 1890) :

On donne un angle et deux points A_2 *et* B_2 *dans son plan. Trouver un segment* PQ *de direction donnée, limité aux côtés de l'angle, et tel que l'angle des droites* A_2P *et* B_2Q *soit égal à un angle donné.*

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

1. — On ne peut contester l'avantage d'un recueil de formules relatives au triangle, donnant, en fonction de ses côtés, les divers éléments qui en dépendent, tels que : hauteurs, bissectrices, médianes, rayons des cercles inscrit, circonscrit, ex-inscrits..., etc.

Dans le même ordre d'idées, il a paru intéressant et utile de rassembler les formules relatives au quadrilatère inscrit. On a été très sobre d'explications, et, le plus souvent, on n'a fait qu'indiquer la marche suivie pour les établir, afin de ne pas soustraire au lecteur le plus clair de son bénéfice, celui de les calculer lui-même.

Pour éviter des répétitions inutiles, on a complété parfois des séries de formules par l'adjonction de résultats ultérieurement justifiés ; une parenthèse et un renvoi servent, en ce cas, d'indication.

Le quadrilatère ABCD sera complété par les points de rencontre des côtés opposés, et par la troisième diagonale SQ.

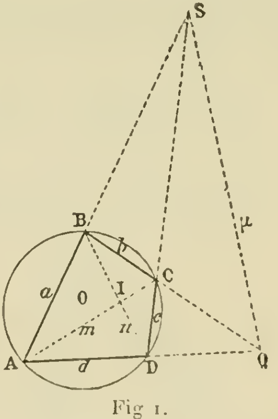


Fig 1.

On posera :

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d,$$

$$a + b + c + d = 2p,$$
$$-a + b + c + d = 2(p - a),$$
$$a - b + c + d = 2(p - b),$$
$$a + b - c + d = 2(p - c).$$
$$a + b + c - d = 2(p - d),$$

$$AC = m, \quad h^2 = ab + cd,$$
$$BD = n, \quad k^2 = ac + bd, \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} h^2 + k^2 = (a + d)(b + c), \\ h^2 - k^2 = (a - d)(b - c), \\ l^2 + k^2 = (a + b)(d + c), \\ l^2 + k^2 = (a - b)(d - c), \\ l^2 + h^2 = (a + c)(d + b), \\ l^2 - h^2 = (a - c)(d - b), \end{array} \right.$$
$$SQ = \mu, \quad l^2 = ad + bc,$$

$$a + c - (d + b) = \varepsilon,$$

R, rayon du cercle circonscrit ;

S, surface du quadrilatère ;

f, la ligne qui joint les milieux des diagonales.

Les autres éléments seront désignés dans la suite, suivant leur ordre d'introduction.

Nota. — Les angles A, B, C, D, S, Q sont les angles intérieurs du quadrilatère et $\widehat{I}$ désigne l'angle AID.

O centre du cercle circonscrit $\widehat{O} =$ SOQ.

Les figures sont établies dans les hypothèses

$$a > c, \qquad d > b, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon > 0.$$

Incidemment, on vérifiera les formules, en leur faisant exprimer les résultats géométriques connus sur les quadrilatères, propriétés qui figurent dans les traités de géométrie, ou dans les exercices qui y sont proposés.

Cette monographie n'est qu'une sorte de statistique de formules relatives au quadrilatère inscrit complet.

2. — Problème. *Déterminer la relation qui existe entre les troisièmes côtés de deux triangles qui ont un angle commun, en fonction des côtés qui comprennent cet angle.*

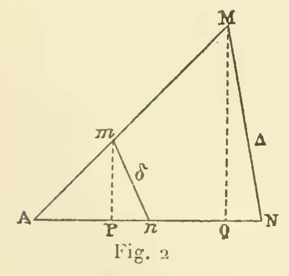


Fig. 2

Soit A l'angle commun aux deux triangles AMN et Amn.

Posons :

$$AM = B, \qquad AN = C,$$
$$Am = b, \qquad AN = c,$$
$$MN = \Delta, \qquad mn = \delta;$$

abaissons les perpendiculaires MQ et mP ; on a :

$$\begin{array}{l} \Delta^2 = B^2 + C^2 - 2C \times AQ \\ \delta^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AP \end{array} \qquad \text{d'ailleurs :} \quad \frac{AQ}{AP} = \frac{B}{b}$$

d'où, en éliminant AP et AQ,

$$bc\Delta^2 - BC\delta^2 = (Bb - Cc)(Bc - Cb).$$

Corollaire. — Si les droites MN et mn sont ou parallèles ou anti-parallèles, le second membre est nul, et l'on a, dans ce cas,

$$bc\Delta^2 = BC\delta^2.$$

Observation. — Si les côtés B, C et b, c de deux triangles comprennent des angles supplémentaires, la relation des troisièmes côtés devient

$$bc\Delta^2 + BC\delta^2 = (Bb + Cc)(Bc + Cb).$$

Application (*fig.* 1). — Cette dernière formule appliquée aux couples d'angles supplémentaires B et D ou A et C, donne :

$$h^2m^2 = k^2l^2,$$
$$l^2n^2 = k^2h^2;$$

d'où

$$mn = k^2, \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} = \frac{l^2}{h^2}.$$

3. — Problème. *Connaissant les côtés de deux triangles* ABC *et* ADC *situés de part et d'autre du côté commun* AC, *calculer la distance* BD.

Soient a, b, c, d, les côtés du quadrilatère considéré ABCD et m, n ses diagonales ; abaissons les perpendiculaires DP et BQ sur AC. On a :

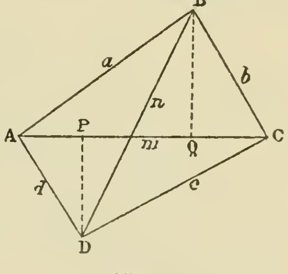


Fig. 3

$$AP = \frac{d^2 + m^2 - c^2}{2m},$$

$$CQ = \frac{b^2 + m^2 - a^2}{2m};$$

d'où

$$PQ = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2m}.$$

$$n^2 = \overline{PQ}^2 + \left(\frac{2ABC}{m} + \frac{2ADC}{m}\right)^2 = \overline{PQ}^2 + \frac{4(ABCD)^2}{m^2},$$

et

$$4m^2n^2 = (a^2 + c^2 - b^2 - d)^2 + 16S^2,$$

S désignant l'aire du quadrilatère.

Application. — Soit : $mn = ac + bd$, on trouvera :

$$16S^2 = 4(ac+bd)^2 - (a^2+c^2-b^2-d^2)^2$$
$$= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

4. — *Théorème de Ptolémée.* — Prenons AE = CD et menons EF parallèle à AD jusqu'à la diagonale AC.

Le triangle AEF est égal à BCD ; achevons le parallélogramme AEFL et faisons l'angle $\widehat{BCG} = \widehat{ACD}$.

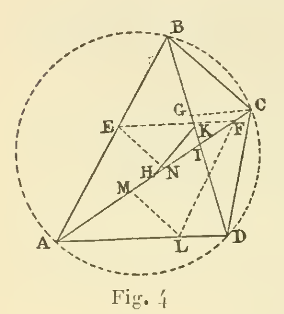


Fig. 4

Prenons aussi FN = BG ; on aura AN = DG et menons LM parallèle à EN.

Les triangles FEN et AEN sont respectivement égaux à BCG et DCG ; les quadrilatères EBCN et LDMC sont inscriptibles, et l'on en déduit :

$$ac = m\text{AN},$$
$$bd = m\text{AM} ;$$

d'où

$$ac + bd = m(\text{AM} + \text{AN}) = m(\text{BG} + \text{GD}) = mn.$$

5. — *Distances, aux quatre sommets, du point de rencontre* I *des diagonales.*

On mènera par I des parallèles à DA et BA et l'on obtiendra

$$\frac{\text{IA}}{ad} = \frac{\text{IB}}{ba} = \frac{\text{IC}}{cb} = \frac{\text{ID}}{dc} = \frac{k}{hl}.$$

Soient H et K les milieux des diagonales, on trouve

$$\text{HI} = \frac{m(ad-bc)}{2l^2}, \qquad \text{KI} = \frac{n(cd-ab)}{2h^2};$$

d'où
$$f^2 = \frac{ac(d^2-b^2)^2 + bd(a^2-c^2)^2}{4h^2l^2}.$$

On trouvera aussi :

$$\overline{\text{IA}}^2 + \overline{\text{IB}}^2 + \overline{\text{IC}}^2 + \overline{\text{ID}}^2 = \frac{k^2(a^2+c^2)(d^2+b^2)}{h^2l^2}$$

et, pour calculer deux côtés opposés, en fonction des deux autres et des diagonales, on a les formules :

$$a^2 = \frac{(mn-bd)(bn-dm)}{bm-dn}, \qquad c^2 = \frac{(mn-bd)(bm-dn)}{bn-dm}.$$

(*A suivre*).

SUR UNE DIFFICULTÉ
DANS LA DISCUSSION DES INÉGALITÉS
Par M. **Elgé**.

Lorsqu'une inégalité

(1) $$f(a, b, c, \ldots) > 0,$$

a lieu *quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres* a, b, c, ... ; si l'une d'elles entre au second degré dans $f(a, b, c, \ldots)$, la méthode élémentaire, indiquée partout, peut se résumer ainsi.

Ayant posé

$$f(a, b, c, \ldots) = Aa^2 + 2Ba + C,$$

on observe que le trinôme en a doit rester invariable de signe ; son discriminant $AC - B^2$ doit donc être *positif* quelles que soient les valeurs de b, c, ... ; c'est une première vérification qui doit être faite tout d'abord. Puis, le signe étant invariable, il reste à reconnaître que A est toujours positif. On est ainsi ramené à discuter les deux inégalités

$$AC - B^2 > 0,$$
$$A > 0 ;$$

si celles-ci sont vérifiées pour toutes les valeurs des paramètres b, c, ... ; alors (1) est une inégalité démontrée,

La difficulté que nous voulons signaler, difficulté qui se présente assez fréquemment, tient *aux restrictions* que l'on doit faire, dans certains cas, sur les valeurs attribuées aux lettres.

Prenons un exemple, pour mieux préciser cette difficulté.

On propose de démontrer que pour toutes les valeurs positives de a, b, c, *on a* (*)

(1) $$8abc < (a + b)(b + c)(c + a).$$

(*) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1880, p. 140. On peut aussi déduire la propriété en question de l'identité

$$8abc + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 = (a + b)(b + c)(c + a),$$

facile à vérifier.

Cette inégalité s'établit sans difficulté en observant (*loc. cit.*), que l'on a

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},$$

$$\sqrt{bc} < \frac{b+c}{2},$$

$$\sqrt{ca} < \frac{c+a}{2},$$

et, par suite,

$$abc < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}.$$

La démonstration suppose que a, b, c représentent trois quantités positives; les inégalités qui lui servent de base ne sont exactes, en effet, que dans cette hypothèse.

Mais, sans utiliser la considération que nous venons de rappeler, considération qui conduit au résultat cherché par une voie rapide et élégante, supposons qu'on veuille faire la discussion de l'inégalité (1), par la méthode classique, résumée au § **1**.

Nous serons alors conduit aux calculs suivants.

L'inégalité (1) peut s'écrire :

(2) $$a^2(b+c) + a(b^2 + c^2 - 6bc) + bc(b+c) > 0.$$

Le discriminant Δ du trinôme, est

$$\Delta = -(b^2 + c^2 - bc)^2 + 4bc(b+c).$$

On a, d'ailleurs, par une transformation facile,

(3) $$\Delta = -(b^2 - 14bc + c^2)(b-c)^2.$$

Cette quantité Δ n'est pas *toujours* positive; le premier membre de (2) n'est donc pas *toujours* d'un signe invariable.

On observera d'abord, pour établir que l'inégalité (1) a lieu *pour les valeurs positives de* a, b, c, que le coefficient de a^2, la quantité $b+c$, est positive.

Le théorème en question sera donc démontré si, dans la même hypothèse, a, b, c *positifs*, on fait voir que Δ est positif. Si les racines de l'équation en a

(4) $$a^2(b+c) + a(b^2 + c^2 - 6bc) + bc(b+c) = 0$$

sont imaginaires, Δ est certainement positif; mais nous supposons, au contraire, qu'elles sont *réelles* et *positives*. Le produit

est positif et égal à bc ; la somme est

$$\frac{6bc - b^2 - c^2}{b + c};$$

elle doit être positive. Le dénominateur étant positif, on doit avoir

$$6bc - b^2 - c^2 > 0.$$

En supposant que cette condition soit remplie, que b, c varient arbitrairement, mais par valeurs positives, on a, *a fortiori*

$$b^2 + c^2 < 14bc.$$

Ainsi Δ est positif et, par suite, les racines de (4) sont imaginaires. L'inégalité (2) se trouve ainsi vérifiée; mais pour les valeurs positives de a, b, c, uniquement.

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

Dans l'article précédent (*), nous avons considéré la circonférence radicale comme le lieu géométrique des points tels que leurs puissances par rapport à deux cercles fixes (O) et (O′) soient égales et de signes contraires ; nous avons vu que le susdit cercle a pour centre le milieu du segment qui joint les centres des circonférences en question, et que son rayon ρ était donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}.$$

On comprend bien la possibilité de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire, étant données deux circonférences (O) et (ρ), trouver une autre circonférence qui, jointe à (O), ait pour circonférence radicale (ρ) que nous appelons *circonférence anti-radicale de* (O) *par rapport à* (ρ) ; mais avant d'entrer dans cette investigation, nous amplifierons un peu ce que nous avons dit par rapport aux circonférences radicales dans l'étude précitée.

(*) Voyez J. E. 1896, p. 78.

Il faut remarquer, d'abord, que les deux circonférences données et la circonférence radicale faisant partie d'un faisceau de cercles, étant posé que les trois circonférences appartiennent à un système coaxial, elles auront les propriétés de ces systèmes et l'on pourrait faire dériver leur étude de la géométrie projective, bien que nous ayions voulu la présenter sous une forme plus élémentaire.

La considération de circonférences radicales nous permet la discussion des rapports des coefficients pour que deux circonférences soient orthogonales, prenant comme fondement, que si deux cercles sont orthogonaux, la circonférence radicale passe par leurs centres et *réciproquement*. On vérifiera donc dans le cas d'orthogonalité cette condition nécessaire et suffisante, que les coordonnées du centre d'un des cercles vérifient l'équation du cercle radical.

Soient les équations des cercles orthogonaux

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

le cercle radical a pour équation

$$2(x^2 + y^2) + 2(A + A')x + 2(B + B')y + C + C' = 0,$$

les coordonnées du centre d'un des cercles, (par exemple, du premier) sont : — A et — B, et par suite on a

$$2(A^2 + B^2) - 2(A + A')A - 2(B + B')B + C + C' = 0,$$

qui se réduit à la relation connue

$$2(AA' + BB') = C + C'.$$

Lorsque les équations des cercles sont écrites en coordonnées barycentriques, ce procédé permettra facilement de rechercher si deux cercles sont orthogonaux, surtout quand on connait *a priori* les coordonnées du centre d'un des susdits cercles. Proposons-nous par exemple, de démontrer que le cercle de Longchamps (voyez J. S., 1886 p. 57) est orthogonal par rapport aux cercles potentiels. Nous appelons *cercles potentiels* ceux qui sont décrits des milieux des côtés comme centres avec des rayons égaux aux médianes correspondantes (voyez P. M. vol. v, p. 70), nous avons en effet :

Équation du cercle de Longchamps

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

Équation du cercle potentiel (P_a)

$$-p_a(\alpha + \beta + \gamma)(\beta + \gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

Équation du cercle radical

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-p_a\beta-p_a\gamma)-2(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta)=0.$$

Nous avons appelé p_a la quantité

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Comme le centre de (P_a) est le milieu du côté a, ses coordonnées barycentriques sont représentées par $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma$, et par conséquent

$$2\beta(b^2\beta + c^2\beta - 2p_a\beta) - 2a^2\beta^2 = 0, \text{ etc., etc.}$$

Si l'une des circonférences se réduit à un cercle-point, la circonférence radicale aura pour rayon

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$$

et lorsque les deux cercles restent réduits à des cercles-points, la circonférence radicale sera toujours imaginaire et aura pour rayon

$$\rho = \frac{d}{2}\sqrt{-1}.$$

Il faut observer que l'on peut généraliser la notion de cercle radical lorsque le rapport des puissances a une valeur $\frac{m}{n}$.

Tous les cercles ainsi obtenus font partie d'un faisceau de cercles ayant beaucoup de propriétés communes.

Le théorème classique : *si l'on a trois cercles et qu'on les combine deux à deux, l'axe radical des circonférences radicales de deux groupes l'est du troisième*, sera également évident quoique la notion de cercle radical soit généralisée et par conséquent :

Si l'on a trois circonférences et que l'on trace les radicales de deux groupes, quel que soit le rapport des puissances, tous ces cercles font partie du même faisceau.

Nous dirons finalement, que l'on peut étendre la notion de cercle radical aux sphères et aux cercles tracés sur une surface sphérique. (*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1896, page 271)

SECONDE MÉTHODE D'ARCHIMÈDE

Cette méthode, qui a été appelée *par échelons*, a servi à Archimède à mesurer les *conoïdes*, les *sphéroïdes* et l'*hélice* (*). Elle consiste principalement à diviser la surface, ou le corps à mesurer, par des droites ou des plans parallèles et équidistants et à construire sur chaque section, comme base, deux rectangles ou prismes, l'un inscrit à la figure, l'autre circonscrit. Si l'on connaît la loi qui régit la grandeur des sections, en fonction de leur distance à la base inférieure, en additionnant les deux séries de rectangles ou de prismes, on aura deux limites de la grandeur cherchée, l'une en dessus, l'autre en dessous. La différence de ces deux limites peut devenir aussi petite qu'on veut, en augmentant le nombre des sections; pourvu toutefois que celles-ci soient toujours croissantes ou toujours décroissantes, de la base au sommet. Donc, si l'on sait trouver la somme des sections équidistantes et la limite vers laquelle tend cette somme, on aura, par là même, la surface ou le volume cherché.

Archimède n'applique pas cette méthode aux surfaces, mais cette extension est si naturelle qu'on peut la considérer comme s'étant présentée en même temps à l'auteur de la méthode. Il en a donné une autre extension à la quadrature des courbes déterminées par une relation entre leurs coordonnées polaires. Nous en parlerons plus loin.

Le principe de la première méthode d'Archimède n'était en somme qu'un théorème sur les limites et les ingénieuses applications qu'il en a faites ne pouvaient guère suggérer une méthode

(*) Il nomme ainsi ce que nous appelons aujourd'hui *paraboloïde* et *hyperboloïde de révolution*, *ellipsoïde de révolution* et *spirale d'Archimède*.

générale. La seconde, au coutraire, est éminemment suggestive : elle devait conduire à la conception de la géométrie analytique — par la représentation graphique des valeurs d'une fonction continue au moyen d'abscisses et d'ordonnées, — quand les idées se furent tournées vers l'analyse et qu'on se fut attaché à perfectionner le calcul algébrique. Elle est l'origine immédiate du calcul intégral. Aussi, à cause de sa fécondité, a-t-elle été plus prisée et plus étudiée que la première, qui néanmoins est beaucoup plus remarquable encore, à cause de la plus grande difficulté du sujet et des moyens simples et variés qu'il y met en jeu.

Voici un extrait de son traité des conoïdes et des sphéroïdes.

I. — *Considérons un nombre quelconque de quantités se surpassant également d'une quantité égale à la plus petite : la plus grande, répétée un même nombre de fois est plus petite que le double de la somme de ces quantités et plus grande que le double de ces mêmes quantités sauf la plus grande.*

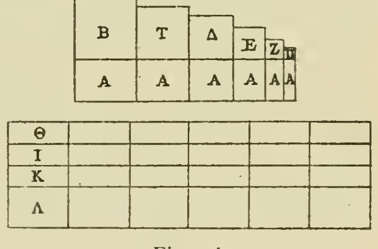


Fig. 14

III. — *Les côtés des carrés* B, Γ,... (*fig.* 14) *se surpassant également d'une longueur égale à celle du plus petit, ajoutons-y des rectangles de mêmes bases que ces carrés et d'une hauteur égale* Λ. *Considérons un nombre égal de rectangles ayant la hauteur partagée en quatre parties* Θ, I, K, Λ, *telles que* $\Theta = I = \frac{\Lambda}{2}$, $K = \frac{\Lambda}{2} = \frac{B}{3}$: *le rapport* $\frac{\Theta + I + K + \Lambda}{I + K}$ *est compris* 1° *entre celui de la surface de la seconde figure à celle de la première et* 2° *entre celui de la même figure et la première, en retranchant de celle-ci le carré* B *et le rectangle correspondant.*

Cet énoncé correspond à la relation

$$\frac{n(na + \Lambda)}{(a + \Lambda)\, a + (2a + \Lambda)\, 2a + \ldots + (na + \Lambda)\, na} > \frac{na + \Lambda}{\frac{\Lambda}{2} + \frac{na}{3}} > \frac{n(na + \Lambda)}{(a + \Lambda)\, a + \ldots + [(n - 1)\, a + \Lambda](n - 1)\, a}.$$

: Nous ne rapporterons pas la démonstration d'Archimède : on peut en prendre une idée J. S. 1895, p. 113, où nous traitons, d'après Archimède, un cas particulier de la précédente.

(F.) XXI. — *Considérons un segment de conoïde, ou bien un segment de sphéroïde plus petit que le demi-sphéroïde : on peut lui inscrire un solide et lui en circonscrire un autre tels que leur différence puisse être supposée plus petite qu'une grandeur donnée quelconque.* Soit le segment ABΓ (*fig.* 15) tournant autour de l'axe BΔ ; par des bissections de l'axe BΔ répétées un nombre suffisant de fois, on pourra toujours obtenir une série de cylindres extérieurs et une autre de cylindres intérieurs, comme l'indique la figure, et tels que la différence des deux solides soit dans la condition demandée, puisque cette différence est égale à celle des deux cylindres ayant pour rayons AΔ et ΘP, laquelle peut évidemment être rendue aussi petite qu'on veut.

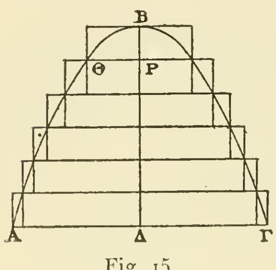


Fig. 15

Par la suite, nous désignerons sous le nom de *théorème d'Archimède* la très importante proposition que nous venons de rapporter, et dont la généralisation à un solide quelconque est immédiate, ainsi que son analogue pour les surfaces.

XXII. — Même théorème concernant un conoïde ou sphéroïde coupé obliquement à l'axe (*fig.* 16.

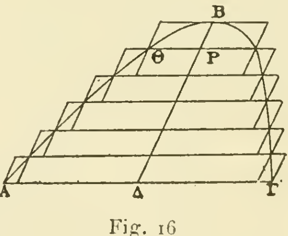


Fig. 16

XXIII. — *Un segment quelconque de conoïde rectangle ou parabolique vaut la moitié ψ du cylindre circonscrit.* Supposons le segment > ψ : circonscrivons et inscrivons comme dans (F) deux solides (*fig.* 17) dont la différence soit plus petite que l'excès du segment sur ψ, *a fortiori*, le solide inscrit sera > ψ. Or, le cylindre inscrit correspondant au rectangle Ξ Z, par exemple,

est à celui produit par ΠZ comme :

$$\frac{\overline{AZ}^2}{\overline{PZ}^2} = \frac{BZ}{B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Omega Z}.$$

Donc, le cylindre total circonscrit au segment est au solide inscrit comme la somme des longueurs ΠE, PZ,.. est à la somme des longueurs TE, ΩZ,... c'est-à-dire, à cause du principe I, plus grand que 2. Ainsi Ψ serait plus grand que le solide inscrit, conclusion contradictoire avec ce qu'on a supposé tout à l'heure.

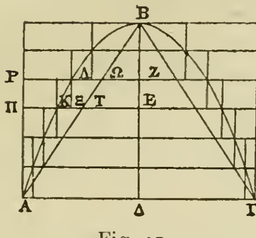


Fig. 17

Supposons le segment $<$ Ψ ; on peut supposer que l'excès du solide circonscrit sur le solide inscrit est inférieur à celui de Ψ sur le segment. On en conclut que le solide circonscrit est $<$ Ψ. On fera voir, comme tout à l'heure, que le cylindre inscrit est au solide circonscrit comme la somme des droites AΔ, ΠE, PZ,... à celle des droites AΔ, TE, ΩZ,..., c'est-à-dire $>$ 2. Ainsi on aurait Ψ plus petit que le solide circonscrit, ce qui contredit la supposition.

XXXIV. — Même théorème pour un segment coupé obliquement.

XXVII, XXVIII, XXIX. — Théorèmes analogues pour les segments droits ou obliques du conoïde obtus angle ou hyberbolique et du sphéroïde. La démonstration est tout à fait semblable à celle de XXXIII, sauf qu'elle emploie le théorème III au lieu du théorème I (*).

(*) Il y aurait lieu de s'étonner qu'Archimède n'ait pas employé pour quarrer la parabole le théorème I, qui menait plus naturellement à cette quadrature qu'à la cubature du paraboloïde, si on ne s'apercevait, par la lecture de ses œuvres, que la découverte de cette quadrature a précédé celle de la cubature des conoïdes. Il a dû la découvrir, fortuitement, par la statique, essayer d'appliquer sa méthode aux sections coniques et imaginer les conoïdes pour lesquels il a reconnu le besoin de nouvelles méthodes. L'ordre dans lequel ses découvertes ont été faites — ou tout au moins divulguées, — paraît être le suivant : centres de gravité, quadrature de la parabole, cylindre et sphères, hélices, conoïdes et sphéroïdes.

Les mêmes principes sont employés par Archimède pour la mesure de l'hélice. En effet, à la courbe AD (*fig.* 18), menons des rayons OA, OB,... faisant des angles égaux entre eux, et décrivons les arcs circulaires $A\beta$, $aB\gamma$, $bC\delta$,... Si la courbe ne coupe qu'une fois chacun de ces arcs, la surface du secteur AOD est comprise entre celles des sommes des secteurs circulaires $AO\beta$, $BO\gamma$, $CO\delta$ et aOB, bOC, cOD. Or, la différence de ces deux sommes, qui est égale à surf. $a\beta$ — surf. $c\delta$, peut être rendue aussi petite que possible, en bissectant successivement les angles en O, et en répétant la même opération.

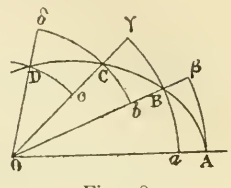


Fig. 18

Dans l'hélice, les rayons sont en progression arithmétique; par suite, les secteurs circulaires représentent les carrés des termes de cette progression. La surface de l'hélice s'obtiendra donc à l'aide du théorème III. (*A suivre*).

BIBLIOGRAPHIE

Arnaudeau (A.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Membre agrégé de l'Institut des Actuaires français, Membre de la Société de Statistique de Paris. — *Projet de Table de triangulaires de 1 à 100 000*, suivie d'une *Table de réciproques* des nombres à cinq chiffres de 1 à 100 000 et d'une *Table de sinus et tangentes naturels* variant de 30″ en 30″, de 0° à 90°, avec texte explicatif. Grand in-8 de xx-41 pages; 1896. **2** fr.

Ces tables présentent un intérêt général et même international en ce sens qu'elles sont destinées, dans la pensée de l'Auteur, aux écoles primaires et secondaires pour remplacer les logarithmes et la trigonométrie et permettre cependant de simplifier les calculs d'arithmétique et pouvoir se livrer à des mesures agraires.

Ces Tables sont calculées en entier et formeront un Volume de 538 pages numériques qui se vendra 15 fr., et dont la présente brochure n'est qu'un extrait et un spécimen.

MM. les Professeurs trouveront un attrait tout particulier à enseigner l'usage de ces Tables par suite de l'exactitude des résultats et du choix nombreux des triangulaires conduisant tous au même produit.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1897 renferme des articles, dus aux savants les plus illustres, sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin, les Notices suivantes : *Notice sur le*

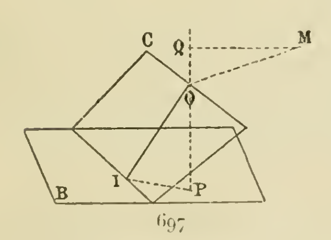
mouvement propre du système solaire; par M. F. Tisserand. — *Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen;* par M. H. Poincaré. — *Les époques dans l'Histoire astronomique des planètes;* par M. Janssen. — *Notice sur la quatrième Réunion du Comité international pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel;* par M. F. Tisserand. — *Notice sur les travaux de la Commission internationale des étoiles fondamentales;* par M. F. Tisserand. — *Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau;* par M. A. Cornu. — *Discours prononcés aux funérailles de M. Tisserand;* par MM. H. Poincaré, J. Janssen et M. Lœwy. — *Travaux au mont Blanc en 1896;* par M. J. Janssen. In-18 de v-918 pages avec 2 Cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, **1 fr. 50**).

QUESTION 697

Solution, par M. Goyens

On donne un plan et un point O *fixes. Par* O, *on mène un plan arbitraire et une perpendiculaire à ce plan. Sur cette droite, on prend des points à des distances de* O *égales à la distance du point* O *à l'intersection du plan arbitraire et du plan fixe. Quelle est la surface* (S) *lieu des points ainsi obtenus, lorsqu'on fait varier le plan arbitraire.* (Mannheim).

Solution. — Soient B le plan fixe, C le plan arbitraire, OP la perpendiculaire sur B. Le plan MOP est perpendiculaire aux plans B et C, donc à leur intersection; il coupera C suivant OI perpendiculaire à cette intersection. Soit MQ perpendiculaire sur OP.



697

$$\widehat{QOM} = 90° - \widehat{POI} = \widehat{OIP}.$$

Donc les deux triangles rectangles MOQ et OPI sont égaux comme ayant l'hypoténuse OM = OI et un angle aigu égal; donc QM = OP = constante. Ainsi, le point M décrit un cylindre droit ayant QP pour axe et OP pour rayon.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; Francis Dauzats, soldat au 51e de ligne; H. L'Huillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

789. — Construire un triangle ABC, connaissant la différence d de deux côtés b, c, les longueurs de la médiane m_a et : soit la hauteur h relative au côté a, soit le rayon r du cercle inscrit.

(*A. Schiappa Monteiro*).

790. — Deux circonférences Δ,Δ' se coupent aux points A,B, la tangente à Δ, en A, coupe Δ' en C ; la tangente à Δ', en ce même point A coupe Δ en D. Soit D′ le symétrique de D par rapport à A. Démontrer que la circonférence CAD′ a son centre sur la perpendiculaire élevée en A, à AB. (*G. L.*)

791. — On considère un triangle ABC ; soient : G le point de Gergonne correspondant au cercle inscrit ; G_a,G_b,G_c ceux des cercles ex-inscrits.

1° La droite GG_a coupe BC en A′ : démontrer que AA′ et les droites analogues BB′,CC′ concourent au point réciproque du centre du cercle inscrit.

2° La droite G_bG_c rencontre BC en A″ ; le point A″ et les points analogues B″,C″ sont en ligne droite. (*G. L.*)

792. — On considère, sur une parabole P, un point A tel que la normale Δ, en ce point, soit inclinée de 45° sur l'axe de P ; Δ coupe P en un second point B. Soit M un point pris arbitrairement sur Δ.

1° La circonférence décrite sur AM comme diamètre coupe la parabole, abstraction faite de A, en deux points C,D situés sur une parallèle à Δ.

2° La droite CD touche la circonférence décrite sur MB comme diamètre. (*G. L.*)

Nota. — La question proposée sous le n° 786 est connue, comme nous le fait observer M. Boutin : Voyez Bos (*Éléments de Trigonométrie rutilique*, 2e édition, p. 176.)

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 3)

CERCLES BITANGENTS A CONTACTS IMAGINAIRES

32. — Reproduisons, sur la figure 17, les tracés et la notation de la figure 2, puis H_1 étant un des points dont nous venons de parler, répétons, en partant de H_1, les constructions que l'on a effectuées en partant de H, c'est-à-dire menons H_1D_1 perpendiculaire à la tangente arbitraire TU ; marquons Ω_1, Ω_1', V_1 et I_1, aux points où elle rencontre MF, MF′, MO et MP ; enfin, de V_1, abaissons, sur l'axe, la perpendiculaire V_1K_1, rencontrant MP en P_1 et MU en U_1,

Appelons Δ la droite U_1V_1, et Γ le cercle qui a pour centre H_1, et dont les nœuds, par rapport à TU, sont les points Ω_1, Ω'_1. Le rayon de ce cercle est la moyenne proportionnelle entre $H_1\Omega_1$ et $H_1\Omega'_1$ [**7**] ; sans modifier en rien un raisonnement qui a déjà été employé [**18**], on conclura de là que ce rayon est, avec la moyenne

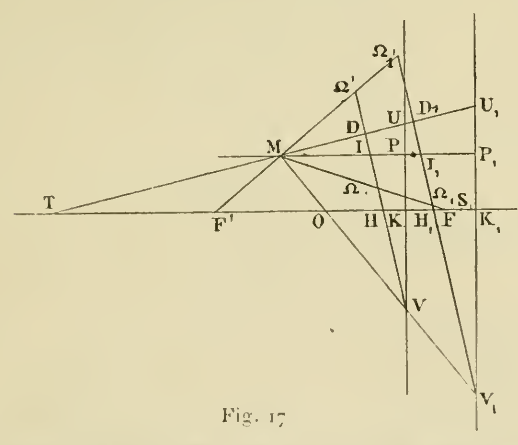


Fig. 17

proportionnelle entre H_1F et H_1F', dans le rapport de b à c.

33. — Les lignes OH_1, OK_1, H_1K_1 (*fig.* 17), sont proportionnelles aux lignes MI_1, MP_1, I_1P_1 ; celles-ci le sont aux lignes MI,

MP, IP, car le rapport de MI_1 à MI et celui de MP_1 à MP sont tous deux égaux au rapport de MV_1 à MV. D'un autre côté, les lignes MI, MP, IP sont proportionnelles à OH, OK, HK, par conséquent [22] à c^2, a^2, b^2. On a donc

$$\frac{c^2}{OH_1} = \frac{a^2}{OK_1} = \frac{b^2}{H_1K_1}.$$

34. — Soit S_1 (*fig.* 17), le conjugué harmonique de H_1 par rapport aux foyers, lequel se trouvera situé entre F et le sommet voisin; le premier des trois rapports ci-dessus sera égal à OS_1; donc, il en sera de même du second, et l'on aura

$$OK_1 \cdot OS_1 = a^2,$$

ce qui prouve que la droite Δ est la polaire de S_1 par rapport au cercle principal. Elle l'est aussi par rapport à la conique, puisque la conique est bitangente à ce cercle et qu'ils ont, pour droite des contacts, l'axe sur lequel se trouve S_1 [1]. Enfin, elle l'est par rapport au cercle Γ; en effet, menons S_1G_1 (*fig.* 18) tangente à la circonférence de diamètre FF'; tirons H_1G_1, qui sera perpendiculaire à FF'; tirons aussi OG_1. Le point de rencontre de Δ avec l'axe étant toujours désigné par K_1, on aura [33]

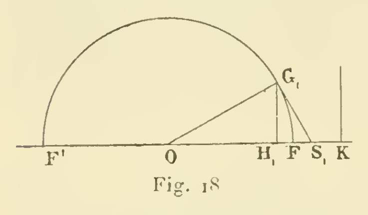


Fig. 18

$$H_1K_1 = \frac{b^2}{c^2} OH_1,$$

et, dans le triangle rectangle OG_1S_1,

$$H_1S_1 = \frac{\overline{H_1G_1}^2}{OH_1},$$

d'où

$$H_1K_1 \cdot H_1S_1 = \frac{b^2}{c^2} \overline{H_1G_1}^2 = \frac{b^2}{c^2} H_1F \cdot H_1F';$$

ainsi, le produit des distances de H_1 à S_1 et à Δ est égal au carré de rayon de Γ [32]; Δ est donc la polaire de S_1 par rapport à Γ.

Si la conique, au lieu d'être une ellipse, comme le suppose la figure 18, était une hyperbole, la démonstration serait la même,

si ce n'est que la tangente à la circonférence de diamètre FF′ devrait être menée par H_1, et alors S_1G_1 serait perpendiculaire à FF′.

35. — On voit que les cercles Γ et les droites Δ, définis provisoirement au moyen d'une tangente à la conique, ne dépendent pas de cette tangente, et possèdent une partie des propriétés des cercles bitangents et des droites des contacts. Pour être en droit de leur attribuer les autres, il suffira maintenant de leur étendre celle qui nous a servi de point de départ, c'est-à-dire de démontrer que tout point de Δ a même polaire par rapport à Γ et à la conique.

Les lettres déjà employées ayant toujours la même signification, soient de plus Z_1 (*fig.* 19), un point quelconque de K_1V_1 ou Δ, et Z, l'intersection de OZ_1 avec KV; tirons HZ et H_1Z_1; ces deux lignes seront parallèles, puisque les rapports de OH à OH_1 et de OZ à OZ_1 égalent l'un et l'autre celui de OV à OV_1. Les polaires de Z et Z_1 par rapport à la conique sont parallèles parce que Z et Z_1 se trouvent sur un même diamètre; mais la première coïncide avec celle de Z par rapport au cercle bitangent de centre H [1], laquelle est perpendiculaire à HZ; donc la polaire de Z_1 par rapport à la conique est perpendiculaire à H_1Z_1, comme celle du même point par rapport à Γ; d'ailleurs toutes deux passent par S_1, puisque Z_1 est sur Δ, et que S_1 est le pôle de Δ par rapport à Γ et par rapport à la conique; donc elles se confondent.

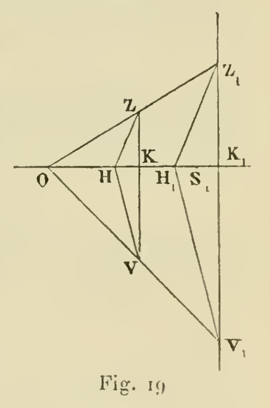


Fig. 19

36. — La proposition qui a été établie [23] sur la longueur de la corde commune à une conique et un cercle bitangent n'a plus de sens lorsqu'il s'agit des cercles Γ. Cependant, pour la leur rendre applicable, il suffit, dans l'énoncé, de substituer, à cette longueur, celle de la perspective, prise du centre de la conique et effectuée sur la tangente au sommet, de la corde que la conique intercepte sur la polaire du centre de Γ par rapport à la circonférence des foyers. Nous entendons ici, par circonférence des foyers, celle qui est décrite sur la distance focale comme diamètre.

Soient S_1 (*fig.* 20 et 21) le conjugé harmonique du centre de Γ par rapport aux foyers, K_1 celui de S_1 par rapport aux sommets

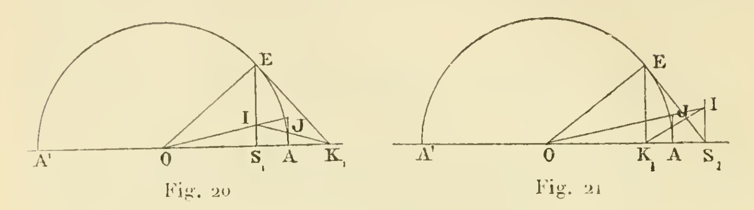


Fig. 20

Fig. 21

A, A'. Menons, dans le cas de l'ellipse, la demi-corde S_1E (*fig.* 20) du cercle principal, ainsi que la tangente K_1E, ou, dans le cas de l'hyperbole, la demi-corde K_1E (*fig.* 21) et la tangente S_1E. Prenons le point de rencontre I de la conique avec la perpendiculaire en S_1 à l'axe AA', puis celui J, de OI avec la tangente en A. Il s'agit de démontrer que le rapport de AJ à K_1E est celui de b à a.

On a, dans les deux cas,

$$\frac{AJ}{S_1I} = \frac{OA}{OS_1} = \frac{OE}{OS_1} = \frac{K_1E}{S_1E},$$

car les deux triangles EK_1S_1, OES_1 sont semblables ; il vient donc

$$\frac{AJ}{K_1E} = \frac{S_1E}{S_1I};$$

or, le dernier rapport est celui de b à a [**23**].

37. — Le rayon de Γ diminue à mesure que le centre se rapproche du foyer ; en même temps Δ s'éloigne du sommet. Quand le centre atteint le foyer, le rayon devient nul, et Δ se trouve être la polaire du foyer par rapport au cercle principal et par rapport à la conique.

Si l'on adopte l'usage habituellement suivi dans des cas analogues, on conservera aux cercles Γ le nom de cercles bitangents et aux droites Δ celui de droite des contacts ; seulement, on dira que les points de contact de ces cercles avec la conique sont imaginaires.

Les points de l'axe que nous n'avons pas encore considérés sont ceux qui, dans l'ellipse, se trouvent sur les prolongements de la ligne des foyers, ou, dans l'hyperbole, entre les deux foyers. Ils

sont aussi les centres de cercles jouissant de propriétés particulières, susceptibles d'être démontrées géométriquement ; mais, en ce qui les concerne, nous nous bornerons, pour le moment, à cette indication.

PROBLÈMES

38. — Voici les énoncés de plusieurs problèmes auxquels les propriétés ci-dessus établies fournissent des solutions géométriques. Actuellement, comme dans tout ce qui précède depuis le paragraphe **7**, il ne s'agit encore que de cercles bitangents de première espèce, à contacts réels ou imaginaires.

Décrire une circonférence bitangente à une conique donnée, connaissant son centre, ou son rayon, ou l'un de ses points, ou l'une de ses tangentes.

Construire les éléments d'une conique bitangente à un cercle donné, connaissant trois points de la courbe, ou deux points avec la tangente en l'un de ces points, ou deux tangentes avec l'un des points de contact, ou trois tangentes.

Construire les éléments d'une conique bitangente à deux cercles donnés, connaissant un point de la courbe, ou une tangente.

Construire les éléments d'une conique bitangente à trois cercles donnés.

(*A suivre*).

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

(*Suite* : 1897, voir p. 15)

II

Passons à l'étude de ce que nous avons appelé précédemment *cercles anti-radicaux*.

Étant données une circonférence (O) et la radicale (ρ), on peut déterminer (O') circonférence anti radicale de (O) par rapport à (ρ). En prenant une distance $\rho O' = O\rho$, on obtiendra son centre

O′; pour calculer son rayon, il faut déterminer R′ d'après la formule qui donne la valeur de ρ; on a donc

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + d^2) - R^2};$$

si nous appelons d la distance $O\rho$.

Pour que la circonférence (O′) soit réelle, on doit avoir

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\rho^2}{2}}.$$

En supposant

$$2(\rho^2 + d^2) - R^2 = 0,$$

la circonférence anti-radicale se réduit à un *cercle point*.

Etant données les équations de deux circonférences (C) et (C′)

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0,$$

la circonférence anti-radicale de (C) par rapport à (C′) est représentée par :

$$x^2 + y^2 + 2(2A' - A)x + 2(2B' - B)y + 2C' - C = 0.$$

Quand il s'agit de coordonnées barycentriques, on a

$$(c)\ (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$
$$(c')\ (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

et, pour la circonférence anti-radicale de (C), par rapport à (C′),

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[(2u'-u)\alpha+(2v'-v)\beta+(2w'-w)\gamma\right]-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0.$$

Lorsqu'une des circonférences dégénère en *cercle point*, le rayon de la circonférence anti-radicale de (O) par rapport à un point ρ a pour valeur

$$R' = \sqrt{2d^2 - R^2},$$

d étant la distance $O\rho$; son centre, sur $O\rho$, est à une distance $OO' = 2O\rho$.

La circonférence anti-radicale sera réelle, réduite à un point, ou imaginaire, selon qu'on supposera

$$2d \gtreqless R\sqrt{2}.$$

Si l'équation de la circonférence est :

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

a et b étant les coordonnées du point ρ, on aura pour équation de la circonférence anti-radicale de (O) par rapport à ρ,

$$x^2 + y^2 - 2(2a + A)x - 2(2b + B)y + 2(a^2 + b^2) - C = 0.$$

Lorsque la circonférence a son centre à l'origine et que le point ρ est sur l'axe des x, à une distance d, l'équation est :

$$x^2 + y^2 - 4dx + 2d^2 + R^2 = 0.$$

De l'expression donnant la valeur du rayon R' de la circonférence anti-radicale, nous déduisons :

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{OO'}^2.$$

Il en résule, que les points de contact des tangentes communes à une circonférence et son anti-radicale par rapport à un point sont, quatre à quatre, sur deux droites qui coupent la ligne OO' en un même point dont la distance à O est égale à $\frac{R^2}{d}$. Ainsi, ce point est le pied de la polaire de ρ par rapport à (O). De plus, ces droites sont inclinées de 45° sur la ligne de centres et les tangentes menées d'un point quelconque de ces droites aux circonférences (O) et (O') sont en relation harmonique.

Enfin, si la circonférence (O) reste fixe et que le point C se meuve sur la ligne OO', l'enveloppe des cercles anti-radicaux est l'hyperbole équilatère correspondant à l'équation

$$x^2 - y^2 = R^2.$$

Il est évident que toutes les circonférences qui passent par les points H et K où l'anti-radicale (O') coupe la ligne de centres, sont aussi anti-radicales de (O) par rapport au point ρ, mais nous appelons particulièrement anti-radicale celle qui a son centre sur $O\rho$. (*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES

ET TRIGONOMÉTRIQUES

ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES

DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 9).

6. — *Longueurs des segments appartenant au périmètre du quadrilatère complété.*

$$SA = \frac{l^2d}{d^2-b^2}, \quad SB = \frac{h^2b}{d^2-b^2}, \quad SC = \frac{l^2b}{d^2-b^2}, \quad SD = \frac{h^2d}{d^2-b^2};$$

$$QA = \frac{l^2a}{a^2-c^2}, \quad QB = \frac{h^2a}{a^2-c^2}, \quad QC = \frac{l^2c}{a^2-c^2}, \quad QD = \frac{k^2c}{a^2-c^2};$$

Expression de la troisième diagonale

$$\mu^2 = h^2l^2 \left\{ \frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(d^2-b^2)^2} \right\} = \frac{4f^2h^4l^4}{(a^2-c^2)^2(d^2-b^2)^2},$$

d'où

$$\overline{SQ}^2 = SA \times SB + QA \times QD.$$

Ainsi, la somme des puissances des points S et Q, par rapport au cercle O, est égale à μ^2. A l'aide de ces expressions et du théorème de Ménélaüs, on vérifiera facilement que chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

7. — *Réciproquement ; si, dans un triangle* SAQ, *on mène deux droites* SD *et* QB *telles que :*

$$\overline{SQ}^2 = SA.SB + QA.QD,$$

le quadrilatère ABCD *est inscriptible* (*fig.* 5).

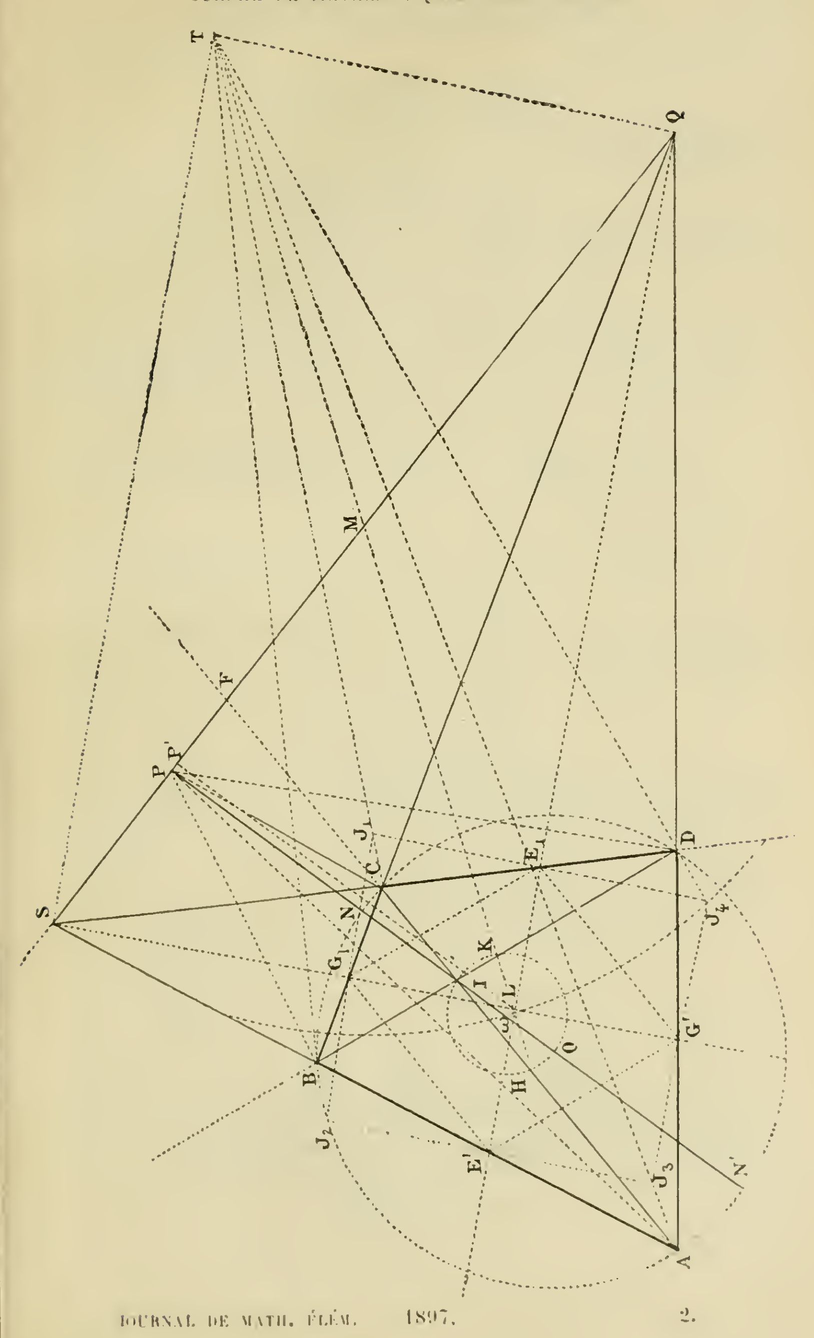
En effet, faisons passer une circonférence par A,D,S qui coupera SQ en un point P tel que :

$$QA.QD = QP.QS,$$

il en résulte :

$$SA.SB = SP.SQ,$$

et les quatre points A,B,P,Q sont aussi sur une même circonfé-


T
Q
M
F
P
P'
S
J1
C
N
G1
E1
D
J4
K
I
L
ω
O
G'
B
H
J2
E'
J3
N'
A

rence. On en déduit :

$$\widehat{BQP} = \widehat{BAP} = \widehat{SDP},$$

donc PCDQ est inscriptible.

De même :

$$\widehat{DSP} = \widehat{DAP} = \widehat{QBP},$$

et BSPC est aussi inscriptible, et, par suite :

$$\widehat{BCD} = \widehat{BSP} + \widehat{PQD} = 2^d - A.$$

8. — *Distances du point* P *aux sommets* A,B,C,D.

Les triangles PBA et PCD sont semblables, et de même les triangles PBC et PAD, ce qui donne :

$$\frac{PA}{ad} = \frac{PB}{ba} = \frac{PC}{cb} = \frac{PD}{dc} = \frac{1}{2f} \text{ (voir n° 10).}$$

On a donc aussi :

$$\frac{PA}{IA} = \frac{PB}{IB} = \frac{PC}{IC} = \frac{PD}{ID} = \frac{PO}{R} = \frac{R}{OI} = \frac{hl}{2kf} \text{ (voir n° 10).}$$

On voit que PI est une bissectrice commune des angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{BPD}$. D'autre part :

$$\widehat{BPS} = \widehat{DPQ} = A,$$
$$\widehat{APS} = \widehat{CPQ} = D;$$

par suite, IP est perpendiculaire à SQ.

9. — *Du point* ω ; *formule de* PI.

La demi-circonférence, décrite sur SQ, rencontre la perpendiculaire PI en un point ω ; on a

$$\overline{S\omega}^2 = SA.SB = SC.SD = SP.SQ = \frac{h^2l^2bd}{(d^2 - b^2)^2},$$

$$\overline{Q\omega}^2 = QA.QD = QB.QC = QP.QS = \frac{h^2l^2ac}{(a^2 - c^2)^2},$$

d'où

$$\mu^2 = \overline{S\omega}^2 + \overline{Q\omega}^2 = \frac{4f^2h^4l^4}{(a^2 - c^2)^2(d^2 - b^2)^2} \quad \text{et} \quad P\omega = \frac{\sqrt{abcd}}{2f},$$

PI, bissectrice du triangle BPD, a pour expression

$$PI = \frac{2Sabcd}{fh^2l^2},$$

à cause de l'identité

$$h^2l^2(h^2l^2 - 4k^2f^2) = 16S^2abcd.$$

10. — *Position du centre* O *par rapport à* SQ — *formules de* PO *et de* OI — *relation entre* R *et* S.

Les triangles IAO et IPC sont semblables, car

$$\widehat{CAO} = \widehat{CAD} - \widehat{OAD} = \widehat{CBD} - (1^{dr} - \widehat{ACD}) = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} - 1^{dr} =$$
$$\widehat{CBA} - 1^{dr} = \widehat{CPS} - 1^{dr} = \widehat{CPI}.$$

Les quatre points A,O,C,P sont sur une même circonférence et par conséquent :

$$\frac{AP + CP}{m} = \frac{PO}{R}.$$

On prouverait, de même, que BODP est inscriptible, d'où

$$\frac{BP + DP}{n} = \frac{PO}{R}.$$

D'autre part :

$$\overline{OS}^2 = R^2 + SA.SB,$$
$$\overline{OQ}^2 = R^2 + QA.QD;$$

d'où

$$\overline{OQ}^2 - \overline{OS} = QA.QD - SA.SB = \overline{Q\omega}^2 - \overline{S\omega}^2 = \overline{QP}^2 - \overline{SP}^2.$$

Ainsi le centre O est sur la perpendiculaire PI.

Il est facile d'établir que la tangente menée du point P au cercle O est égale à $P\omega$; en outre, la similitude des triangles AOI, ICP fournit

$$OI = \frac{abcdK^2}{h^2l^2 \times PI} = \frac{k^2f}{2S};$$

et, en vertu de la relation

$$4RS = hkl,$$

on a

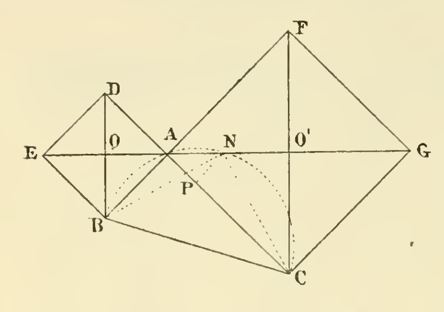
$$PO = \frac{h^2l^2}{8fS}, \qquad \text{et} \qquad R^2 = OP.OI.$$

Ces résultats sont connus ; on sait en effet que le point I est le pôle de la droite SQ par rapport au cercle O.

(*A suivre*).

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION
DU THÉORÈME DE PYTHAGORE
Par M. **Brand**.

Sur les deux côtés c et b de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, on construit les carrés BADE et CAFG dont on trace les diagonales.



Les droites OA et AO' sont dans le prolongement l'une de l'autre.

La demi-circonférence décrite sur BC, ou a, comme diamètre, coupe OO' en un point N.

On a $\widehat{BN} = \widehat{NC} = \frac{\varpi}{2}$, car $\widehat{NAC} = 45°$.

Donc, si on tire les droites BN et NC, le triangle BNC est rectangle isoscèle. Les triangles rectangles OBN et O'CN sont égaux.

Si on remarque que la hauteur NP du triangle ANC est égale (ainsi qu'il est facile de le voir) à $\frac{b-c}{2}$, on pourra écrire

$$\text{surf. NO'C} = \text{surf. AO'C} - \text{surf. ANC},$$

$$= \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \cdot \frac{b-c}{2} = \frac{cb}{4};$$

c'est-à-dire que surf. NO'C $= \frac{1}{2}$ surf. ABC, ou surf. ABC $=$ surf. OBN $+$ surf. NO'C.

Dès lors, en soustrayant du quadrilatère OBCO' : d'une part, la surface du triangle ABC ; et, d'autre part, la somme des surfaces OBN et NO'C, on aura deux résultats équivalents, c'est-à-dire que

$$\text{surf. BNC} = \text{surf. OAB} + \text{surf. ACO'}.$$

En multipliant les deux membres par 4, on a

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

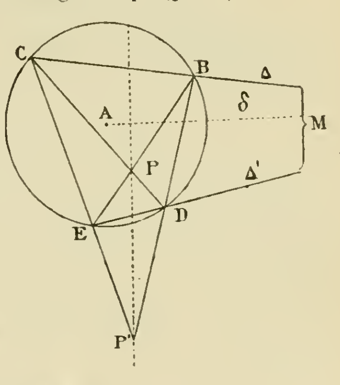
PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

par M. **Alfred Bertezène.**

Par un point A, mener une droite qui aille passer par le point de rencontre M de deux droites Δ, Δ' *qu'on ne peut prolonger.*

Ce problème a été traité de bien des façons diverses. On en trouve notamment une solution *par la règle* dans la *Géométrie de la règle et de l'équerre* de M. de Longchamps (p. 31).

Voici une solution qui est aussi très simple; mais elle exige l'emploi de la règle et du compas.



Du point A, comme centre, décrivons un cercle quelconque qui coupe les droites données. Traçons les diagonales du quadrilatère BCDE, qui se coupent en un point P. Prolongeons CE, BD jusqu'à leur rencontre en P' et menons PP'. C'est la polaire du point M. La perpendiculaire δ, abaissée du centre A, sur PP', passe par M.

Remarque. — On peut toujours disposer du rayon AE de telle sorte que la corde ED (ou la corde CB) étant très petite, CE et BD se rencontrent dans les limites de l'épure. Au besoin, on mènerait en E et en D deux perpendiculaires sur AE, AD. Ce seraient deux tangentes dont la rencontre à proximité fournirait le deuxième point de la polaire.

SUR UN THÉORÈME DE M. LEMOINE

Par M. **Jorge F. d'Avillez.**

M. E. Lemoine a démontré (J. E. 1896, p. 164), que, dans un triangle dont les côtés sont a, b, c, si F est le point de contact du cercle de Feuerbach avec le cercle inscrit et F' le point où la

tangente en F touche l'ellipse d'aire maxima inscrite au triangle, on a

$$FF' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}.$$

Soit ABC un triangle tel que $a > b > c$; si O est le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit, H l'orthocentre, on peut donner une expression simple de l'aire du triangle OIH. En effet, on a, dans le triangle ABC,

$$FF' = \frac{1}{2} \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab)},$$

et d'après un théorème de M. Sondat (N. A. question 1593), si r représente le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, on a :

$$OIH = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}.$$

D'ailleurs, en représentant par δ la quantité $4R+r$, où R est le rayon du cercle circonscrit, on a

$$a^2+b^2+c^2 = 2(p^2 - r\delta),$$

et comme

$$bc+ac+ab = (p^2 + r\delta),$$

il vient

$$OIH = \frac{FF'}{4r}(p^2 - 3r\delta).$$

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 18)

PAPPUS

Après Archimède, on ne voit guère parmi les Anciens que Pappus qui se soit occupé de la Géométrie de la mesure, au moins comme recherches originales.

C'est à lui qu'on doit la transformation des procédés d'Archimède relatifs au mesurage de la sphère, tel qu'on l'enseigne encore aujourd'hui, sauf qu'il y fait usage de la méthode d'exhaus-

-ion. Cette démonstration emploie, comme on sait, les mêmes moyens pour la surface et pour les volumes : la considération d'un triangle isoscèle tournant autour d'une droite de son plan.

Pappus a donné la quadrature d'une surface sphérique limitée par une courbe définie ainsi qu'il suit : le quart de circonférence PB (*fig.* 19) fait une révolution complète autour du rayon PO, en partant de la position PKA, tandis que le point M, d'abord en P, se meut le long du même arc PR, ce qui donne une courbe PMM'A. On peut présenter la démonstration ainsi : avec le rayon CO, égal au côté du carré circonscrit au grand cercle, décrivons le quadrant CND. Le rayon OM rencontre l'arc PA en K ; traçons le petit cercle KML qui coupe la courbe PMM'A en M. Supposons que R et R' sont deux divisions consécutives de la circonférence ARBA en parties égales.

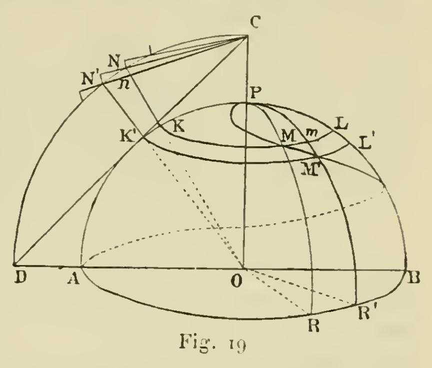


Fig. 19

On a

$$\frac{\text{fuseau } PMm}{\text{sect. } ORR'} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{OR}^2} = \frac{\overline{PL}^2}{\overline{OP}^2}, \ \widehat{ROR'} = 4.\widehat{KOK'}\ 8.\widehat{NCN'} ;$$

donc

$$\frac{\text{sect. } ROR'}{\text{sect. } NCn} = \frac{8.\overline{OR}^2}{\overline{CN}^2}.$$

De ces égalités, on tire

$$\frac{\text{fuseau } PMm}{\text{sect. } NCn} = \frac{8.\ \overline{PK}^2}{\overline{CN}^2} = 4.$$

Les divisions dont nous avons parlé déterminent dans la surface sphérique PMA et dans le segment CND des polygones sphériques inscrits et circonscrits à la manière d'Archimède, et dont les aires peuvent par conséquent différer aussi peu qu'on le veut, en bissectant de plus en plus les arcs RR', R'R''... Il s'en suit que l'aire comprise entre la courbe PMM'A et l'arc PA égale le qua-

druple du segment CND. Or, la surface de l'hémisphère égale celle du secteur COD ; donc le reste de la surface, limité par la courbe, égale le triangle COD, lequel égale le carré du rayon OP.

Cette démonstration, si remarquable, a été présentée d'une manière plus générale par Mac-Laurin (*A Treat. of Flux.*) : le point M parcourt le quadrant PR, tandis que ce même quadrant fait une fraction quelconque de tour (*). La courbe PMM' avait déjà été ainsi généralisée, quarrée et rectifiée par Guido-Grandi (voir J. S. 1893, p. 176), qui lui avait donné le nom de *Clélie* (*Flores Geom.*) en l'honneur de la comtesse Clelia Grillo Borromeo, à qui ce livre était dédié. Un autre cas particulier remarquable de ces courbes est la *vivianienne* ou *cyclocylindrique*, qui a lieu quand le quart de circonférence parcourt un quart de tour seulement pendant que le point M parcourt le quadrant PR.

Probablement, pour ne pas compliquer sa figure, Pappus ne trace que les lignes correspondant aux divisions qu'il indique : il se contente de rappeler la méthode d'Archimède (F) : c'était un premier pas vers la simplification de la méthode d'exhaustion appelée *des indivisibles*.

C'est Pappus qui a énoncé le premier les deux théorèmes dits *de Guldin*, et il serait de toute justice qu'ils portassent son nom, d'autant plus que Guldin ne les a pas plus démontrés que lui.

La méthode d'exhaustion a été employée chez les Modernes principalement par Commandin, Lucas, Valerius, Neper, de la Faille, Guldin, Cavalieri, Roberval, Fermat, Torricelli, Léotaud, G. de Saint-Vincent, Pascal, Huygens, Tacquet, Lalouvère, James Gregory, Newton, Viviani, Nicolas, Guido-Grandi, Mac-Laurin et enfin Legendre, dans la célèbre *Géométrie* duquel on a cru devoir remplacer certaines démonstrations imitées des Anciens par d'autres plus courtes, mais assez peu rigoureuses pour un traité classique de géométrie.

(*A suivre*).

(*) Ce cas général se ramène d'ailleurs au cas particulier de Pappus : il est facile de se rendre compte que deux de ces surfaces sont entre elles comme les angles dont tourne le quadrant mobile, jusqu'à ce que le point M arrive au bas de ce dernier.

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

438. — *Combien peut-on former de nombres différents de* n *chiffres, en n'employant que* 3 *chiffres, ces* 3 *chiffres figurant dans chacun des nombres?*

On trouve la formule :

$$x = 2.\frac{n(n-1)}{1.2} + 2(2^2-1)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} +$$
$$+ 2(2^3-1)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + 2(2^4-1)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

où l'on prend seulement les $n-2$ premiers termes. On l'obtient en cherchant le nombre des arrangements qui contiennent $n-2$ fois l'un des chiffres et une fois chacun des deux autres; puis $n-3$ l'un des chiffres, deux fois l'un des deux autres et une fois le troisième, etc... et faisant la somme.

Pour $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$

on a $x = 6, 36, 150, 540, \ldots$

439. — *Des jetons portent sur chaque face un numéro, de telle sorte que le côté pile et le côté face constituent les deux moitiés d'un domino. Pour le jeu ordinaire s'arrêtant au double-six et comprenant* 28 *dominos, il y aura* 28 *jetons correspondants, le blanc étant figuré par* 0. *On suppose que le jeu s'arrête au double* $n-1$. *Ceci posé, on jette ces jetons comme des dés, et on demande de vérifier les propositions suivantes :*

1° *Le nombre des coups possibles est :* $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2° *La somme des points vus à chaque jet est comprise entre* $\frac{n(n^2-1)}{6}$ *et* $\frac{n(n^2-1)}{3}$.

3° *Le nombre de manières d'amener un total de points* p, *compris dans les limites précédentes est le coefficient de* x^p *dans le développement de*

$$2^n x^{\frac{n(n^2-1)}{6}} (x+1)^{n-1}(x^2+1)^{n-2}(x^3+1)^{n-3}\ldots\ldots(x^{n-1}+1).$$

4° *Si l'on supprime les* n *jetons qui correspondent aux* n *doubles, le nombre de manières d'amener un total déterminé* p *de points est le coefficient de* x^p *dans le développement de :*

$$x^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} (x+1)^{n-1}(x^2+1)^{n-2}(x^3+1)^{n-3}\ldots\ldots(x^{n-1}+1).$$

EXERCICES (*)

1. — *Deux angles droits ont leurs sommets en* o, *leurs côtés rencontrent une droite donnée en* a,b, *pour l'un, et en* a',b', *pour l'autre. Le point* p *étant le pied de la perpendiculaire abaissée de* o *sur la droite donnée, si* aa' = a'p, *démontrer que* bb' = pb.

2. — *Les sommets d'un rectangle donné sont* o, a, b, c. *Du point* o *on abaisse sur la diagonale* ac *la perpendiculaire* ol. *Cette droite rencontre les côtés du rectangle aux points* m, n. *Démontrer que* $\frac{1}{\mathrm{ol}} = \frac{1}{\mathrm{om}} + \frac{1}{\mathrm{on}}$.

3. — *On donne un rectangle et un point* o *sur l'une de ses diagonales. La somme des carrés des distances de ce point aux extrémités de l'une des diagonales est égale à la somme analogue pour l'autre diagonale. Démontrer que cette propriété est vraie aussi, lorsque le point* o *est absolument quelconque.*

4. — *On donne une circonférence de cercle et deux points* a,b. *Par le point* a, *on mène une transversale. Par les deux points où elle coupe la circonférence donnée et par le point* b *on fait passer un cercle. Démontrer que lorsque la transversale tourne autour du point* a *les cercles analogues à celui-ci passent par un même point.*

5. — *On donne un angle* α *de sommet* o. *Du point* m *pris sur sa bissectrice, on abaisse sur ses côtés les perpendiculaires* mp, mq ; *démontrer que l'aire du quadrilatère* o p m q *est égale à* $\frac{\overline{\mathrm{om}}^2 \sin \alpha}{2}$.

(*) Nous croyons rendre service aux Professeurs en indiquant sous ce titre des sujets de devoirs destinés aux commençants, mais nous n'en insérerons pas les solutions. Nous prions nos correspondants de nous adresser, de temps à autre, quelques énoncés de cette nature, signés ou non. Ceux-ci nous ont été adressés par M. Mannheim qui porte depuis longtemps à ce Journal un intérêt dont, profitant de l'occasion, je suis heureux de le remercier ici. G. L.

6. — *Sur les cordes d'un cercle comme diamètres, et dans des plans perpendiculaires à cette courbe, on décrit des cercles : à quelle surface appartiennent-ils ?*

7. — *Par les points d'un cercle d'une sphère donnée, on mène des parallèles à une droite fixe, elles rencontrent de nouveau la sphère : à quelle courbe appartiennent ces points de rencontre ?*

8. — *A quelle courbe appartiennent les points d'une sphère d'où l'on voit sous un angle droit un segment fixe donné ?*

BIBLIOGRAPHIE

Cours d'Algèbre élémentaire conforme aux derniers programmes de l'enseignement classique et de l'enseignement moderne, par J. F. (Alfred Mame, à Tours ; Ch. Poussielgue, à Paris ; 1896).

Il y a aujourd'hui des baccalauréats en si grand nombre, des examens de genres si divers, qu'il paraît difficile de composer un livre en vue de telle ou telle préparation particulière ; il faudrait les multiplier par trop. Le mieux est d'écrire un livre élémentaire, sur l'Algèbre par exemple, comme celui que nous signalons ici à toute l'attention de nos lecteurs, en visant l'*enseignement général* de l'Algèbre élémentaire. Par contre-coup, si le livre est bien ordonné et suffisamment étendu, et c'est le cas de l'Algèbre en question, il pourra sans peine être utilisé, pour les préparations particulières, à la variété infinie !

L'auteur me permettra-t-il une légère critique ?

Lorsque, à la page 158, il parle des équations réciproques du quatrième degré, il distingue — je sais que cette distinction a été faite par d'autres — des équations réciproques de première et de deuxième espèce. Il n'y a, à bien envisager la chose, comme le faisaient les anciens auteurs (Mayer et Choquet notamment, si ma mémoire ne me trompe pas) qu'une seule équation réciproque du quatrième degré :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bkx + Ak^2 = 0,$$

dans laquelle k est un paramètre quelconque. On peut donner à k les valeurs $+1$, -1, et beaucoup d'autres ; mais cela ne constitue pas des genres différents et qu'il soit nécessaire de distinguer en deux espèces.

J'ai vu avec plaisir que l'auteur maintenait l'introduction des dérivées et les premières notions de la Géométrie Analytique, dans l'ensemble des connaissances qu'on doit aborder dans le cours de mathématiques élémentaires. Un vent de réaction qui, il faut l'espérer, ne durera pas, en même temps qu'il touchait gravement les programmes d'admission à l'École Polytechnique, a fait supprimer ces matières de l'enseignement des candidats à l'École de Saint-Cyr. On peut souhaiter en se plaçant au point

de vue scientifique, vraiment trop oublié au milieu de ces réformes regrettables, que cet enseignement soit bientôt remis au niveau scientifique auquel il avait été placé et qui permettait de juger les candidats sur un terrain autre que celui de la mémoire ; un terrain meilleur, je persiste à le croire. G. L.

Parmi les publications récentes, nous signalons à nos lecteurs :

1° Le *Bulletin de la Presse*. — Ce journal insère tout ce qui, au point de vue professionnel, peut intéresser les Publicistes, les Directeurs périodiques et les Imprimeurs.

Son programme comporte, outre une série d'articles de fond, la législation et la jurisprudence, — la liste des nouveaux journaux parus, — les modifications apportées aux anciens, — des études sur la presse, à l'étranger, — des causeries pratiques sur la presse, l'imprimerie et la publicité, — les documents relatifs aux syndicats de la presse, — les journaux et imprimeries à vendre, — les offres et demandes d'emplois, etc.

Cette publication bi-mensuelle est le complément naturel du *Guide de la Presse*, « Bibliographie annuelle des journaux et périodiques », l'ouvrage est le plus complet du genre.

Demander des spécimens gratuits des deux publications à M. E.-G. Raymond, 21, *quai Saint-Michel, Paris*.

2° L'*Écho du Public*. — Cette publication est inspirée par la même idée que celle qui a présidé à la fondation de l'*Intermédiaire des chercheurs et curieux* et, plus récemment, à celle de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. L'*Écho du Public* est un instrument d'information sur toutes les choses : littérature, sciences, arts, théâtre, curiosité pure, etc... Il paraît tous les samedis (Prix : 0 fr. 10 ; abonnement : un an : 6 francs ; six mois : 3 fr. 50. 54, *Rue de la Victoire, Paris*).

BACCALAURÉATS

Académie de Caen.

1° *Questions au choix* : (*a*) Définition d'une fraction irréductible. Montrer que la condition nécessaire et suffisante est que les deux termes soient premiers entre eux. Combien y a-t-il de fractions irréductibles inférieures à l'unité et ayant pour dénominateur 48 ?

(*b*) Théorie de l'extraction de la racine carrée à moins d'une unité.

(*c*) Somme des carrés des n premiers nombres entiers.

2° *Problème*. — Étant donnée une parabole dont le foyer est en F, d'un point M de la courbe on abaisse la perpendiculaire MP sur son axe : montrer comment varie le volume du cône engendré par la révolution du triangle MPF autour de son côté PF, lorsque le point P se déplace sur la parabole à partir du sommet.

Académie de Clermont.

1° *Questions au choix* : (*a*) Volume engendré par un segment de cercle ;

(*b*) Intersection d'une droite et d'une parabole ;

(*c*) Propriétés de la tangente à la parabole.

2° *Problème.* — Etant donné un trièdre trirectangle OXYZ et un point A sur OX, demande de déterminer sur OY et sur OZ des points B, C tels que la sphère circonscrite au tétraèdre OABC ait un rayon donné r et que le volume du tétraèdre OABC ait une valeur donnée b^3. Calculer ensuite l'aire du triangle ABC. On prendra $OA = a$.

Académie de Grenoble.

1° *Questions au choix* : (a) Etablir la formule :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

(b) Etant donnée $\operatorname{tg} a$, trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$;

(c) Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

2° *Problème.* — A l'intérieur d'un triangle ABC, dont les côtés sont a, b, c, et dont la hauteur $AD = h$, on mène une parallèle EF à BC, à une distance $AG = x$ du sommet A ; on prolonge EF à l'extérieur de longueurs EH = EA, FI = FA, et on joint HB, IC. On demande : 1° d'exprimer en fonction des données et de x l'aire du trapèze HBCI ; 2° de déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est maxima.

Académie de Lille.

1° *Questions au choix :* (a) Divisibilité de $x^m + a^m$ par $x + a$.

(b) $x^m - a^m$ est toujours divisible par $x - a$.

(c) Calculer le quotient de $\left(\frac{x^m - a^m}{x - a}\right)$; en déduire la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique.

2° *Problème.* — On connaît la petite base d'un trapèze isoscèle et la somme b des deux côtés non parallèles. Déterminer la grande base $2x$ et la hauteur y, de telle sorte que l'aire du trapèze soit égale à celle d'un carré de côté m. — Discuter.

QUESTION 693

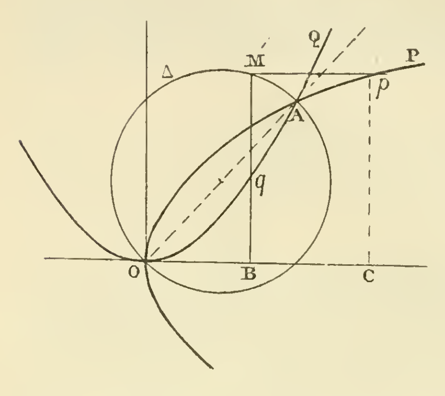
Solution par M. A. Droz-Farny.

On considère une parabole P, *de sommet* O. *On fait tourner, dans son plan, autour de* O, *d'un angle droit, la parabole* P ; *soit* Q *sa nouvelle position. Les deux paraboles* P, Q *ont un seul point réel commun* A ; *sur* OA *comme diamètre, on décrit une circonférence* Δ. *Par un point* M, *arbitrairement choisi sur* Δ, *on mène des parallèles aux axes des paraboles* P *et* Q ; *elles les rencontrent respectivement aux points* p *et* q. *Démontrer que le triangle* pMq *est isoscèle.* (G. L.)

Les paraboles P et Q ont respectivement pour équations

$$y^2 = 2px, \quad \text{et} \quad x^2 = 2py.$$

Elles se coupent en un point A tel que OA est incliné de 45° sur les axes de P et de Q; les coordonnées de A sont donc évidemment



$$x = y = 2p,$$

et le cercle Δ aura pour équation

$$(x-p)^2+(y-p)^2=2p^2,$$

ou

$$(1)\ x^2 + y^2 - 2px - 2py = 0.$$

Soit M un point de Δ; Mq rencontre en B l'axe de P et soit pC l'ordonnée de p; on aura

$$Mp = OC - OA = \frac{\overline{pC}^2}{2p} - OB = \frac{\overline{MB}^2}{2p} - OB.$$

$$Mq = MB - qB = MB - \frac{\overline{OB}^2}{2p}.$$

Or, d'après l'équation (I) du cercle Δ

$$\frac{\overline{OB}^2}{2p} + \frac{\overline{MB}^2}{2p} - OB - MB = 0;$$

donc $$Mp = Mq.$$

QUESTION 694

Solution par M. A. Droz-Farny

Plaçant le pôle d'une transformation par rayons vecteurs réciproques au sommet c *d'un triangle donné* abc, *on prend les transformés* a′, b′ *des sommets* a, b. *Démontrer que le transformé du centre* o *du cercle inscrit au triangle* abc *est, sur la droite* co, *le centre du cercle ex-inscrit au triangle* a′cb′.

(Mannheim).

Soient d'abord o et o_1 les centres du cercle inscrit et ex-inscrit dans l'angle c au triangle abc; on sait que l'on a :

$$co = \frac{p-c}{\cos\frac{c}{2}},\quad co_1 = \frac{p}{\cos\frac{c}{2}};\quad \text{d'où}\quad co.co_1 = \frac{p(p-c)}{\cos^2\frac{c}{2}}\,ab,$$

résultat qui confirmerait déjà le théorème de M. Mannheim, dans le cas particulier d'un module de transformation $k^2 = ab$.

Il en résulte :

(I) $$co_1 = \frac{ab \cdot \cos \frac{c}{2}}{p - c}.$$

Soit maintenant k^2 le module d'une transformation par rayons vecteurs réciproques ; on aura :

$$ca' = \frac{k^2}{a}; \quad cb' = \frac{k^2}{a};$$

$$ab' = \frac{ck^2}{ab};$$

donc
$$p' = \frac{pk^2}{ab};$$

$$p' - c' = \frac{(p-c)\,k^2}{ab},$$

et par conséquent

$$co' = \frac{k^2}{co} = \frac{k^2 \cos \frac{c}{2}}{p - c} = \frac{k^4 \cos \frac{c}{2}}{ab(p' - c')} = \frac{a'b' \cos \frac{c}{2}}{p' - c'}.$$

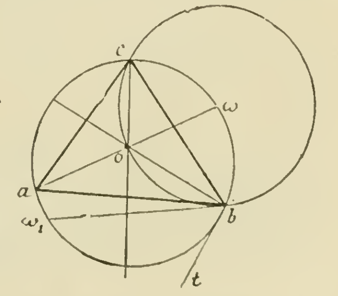
Ainsi, d'après la formule (I), o' est le centre du cercle exinscrit dans l'angle c au triangle $a'cb'$.

Solution par M. L'Huillier.

Traçons le cercle (ω) circonscrit à cob, cercle qui a pour centre le point ω où la bissectrice de l'angle a rencontre la circonférence abc et la tangente $b\omega_1$, en b, à ce cercle. Traçons, de même, le cercle circonscrit à abc et la tangente bt en b à ce cercle. On a évidemment

$$\widehat{cb\omega_1} = \frac{\widehat{c} + \widehat{b}}{2}, \quad \widehat{cbt} = \widehat{c} + \widehat{b},$$

donc le cercle (ω) bissecte l'angle en b de bc et du cercle circonscrit.



Dans une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques de sommet c, l'inverse o' de o est l'intersection de co avec

l'inverse du cercle (ω). L'inverse du cercle circonscrit est la droite $a'b'$ et la droite inverse de (ω) est la bissectrice de l'angle extérieur de $a'b'c$.

QUESTION 698

Solution, par M. Francis Dauzats, soldat au 51e de ligne.

On donne le point O *et la surface* (S) *de la question* 697 (*). *Par* O, *on mène un plan arbitraire et une perpendiculaire à ce plan. Sur cette droite, on prend des points à des distances de* O *égales aux distances de ce point* O *à l'intersection du plan arbitraire de* (S).

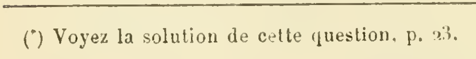
Quelle est la surface lieu des points ainsi obtenus, lorsqu'on fait varier le plan ordinaire? (Mannheim).

La surface S est un cylindre de révolution dont l'axe passe par O. Les plans déterminent des ellipses dont les demi-axes sont les distances considérées. Soit OX la perpendiculaire au plan ABCD.

1° En portant OM = CO, le petit axe de l'ellipse étant égal au rayon OA′ du cylindre, le lieu de M est la sphère décrite de O comme centre et inscrite dans le cylindre (sphère tangente au plan donné dans la question 697).

2° En portant ON = OA, N′ étant la projection de N sur l'axe, on voit facilement que ON′ = OA′. Donc le lieu de N se compose des deux plans tangents à la sphère précédente aux intersections avec l'axe (soit, le plan donné dans la question 697 et son symétrique par rapport à O).

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; Goyens; H. L'Huillier.



(*) Voyez la solution de cette question, p. 23.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 25)

CERCLES BITANGENTS DE SECONDE ESPÈCE

39. — Ce sont les cercles bitangents dont les centres se trouvent sur le second axe ou axe non focal. La circonférence de chacun a tous ses points extérieurs à la conique, et les tangentes à celle-ci la rencontrent.

Un cercle étant donné ainsi qu'une droite qui le coupe, nous appelons *nœuds* les deux points qui, situés sur le diamètre perpendiculaire à la droite, ont leurs distances à cette droite égales à la moitié de la corde interceptée. On verra plus loin ce qui nous autorise à désigner ces points sous un nom déjà affecté à d'autres [**7**].

La moitié de la distance des nœuds est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux extrémités du diamètre qui les contient.

Deux circonférences qui se coupent ont les mêmes nœuds par rapport à leur axe radical.

40. — *De chaque nœud on voit, sous un angle droit, la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la symétrique, par rapport au milieu de la corde interceptée, de la polaire de ce point.*

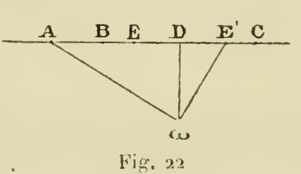


Fig. 22

Soient A (*fig.* 22) un point de la droite, BC la corde comprise dans le cercle, D le milieu de BC. Sur la perpendiculaire en D à BC, portons Dω égal à BD ; ω sera l'un des nœuds. Supposons que E soit le conjugué harmonique de A par rapport à B, C ; prenons DE′ égal à DE ; il s'agit de démontrer que l'angle AωE′ est droit. Or, de $\overline{BD}^2 = AD.DE$, $BD = D\omega$ et $DE = DE'$, on conclut $\overline{D\omega}^2 = AD.DE'$, de sorte que le triangle AωE′ est rectangle en ω.

41. — *Si l'on joint l'un des nœuds d'une tangente à une conique et d'un cercle bitangent* 1° *avec le point d'intersection*

de la tangente et de la droite des contacts, 2° *avec le symétrique du point de contact de cette tangente par rapport au milieu de la corde qu'elle détermine dans le cercle, les deux lignes ainsi obtenues seront perpendiculaires entre elles* [**6**, **40**].

42. — *Le lieu des nœuds d'une même tangente à la conique par rapport aux divers cercles bitangents se compose de deux droites passant par le point de contact.*

Soient O (*fig.* 23) le centre de la conique, MT la tangente en M, H le centre d'un cercle bitangent, C l'une des extrémités de la corde qu'il intercepte sur MT, U et V les points de rencontre de la droite des contacts avec MT et avec MO. La perpendiculaire menée de H à MT passera par V ; sur cette perpendiculaire prenons Dω égal à CD ; ω sera l'un des nœuds.

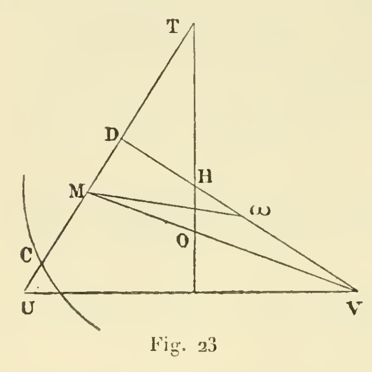


Fig. 23

Le cercle venant à changer, mais M restant fixe, les triangles DMV, DUV conserveront leurs angles, de sorte que DU variera proportionnellement à DM ; il en sera de même de Dω, puisque l'on a $D\omega = CD$ et $\overline{CD}^2 = DM.DU$ [**6**]. Le rapport de Dω à DM étant constant, l'angle DMω l'est aussi, et ω décrit une droite issue de M.

43. — *Les droites lieux des nœuds d'une même tangente par rapport aux divers cercles bitangents coupent l'axe non focal en deux points situés, avec les foyers, sur une même circonférence.*

Pour construire les deux droites, on peut se servir d'un cercle bitangent quelconque ; prenons, à cet effet, le cercle principal. Il intercepte, sur la tangente MU (*fig* 24), une corde CC′, dont les extrémités sont les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers F, F′ sur MU, et dont le milieu D est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O. Portant, sur cette dernière, les longueurs Dω, Dω′ égales à CD, on aura, en ω, ω′, les nœuds du cercle par

rapport à MU; si l'on tire ensuite Mω, Mω' (*) jusqu'à leurs intersections en Z, Z' avec l'axe nonfocal, Z, Z' seront les points dont

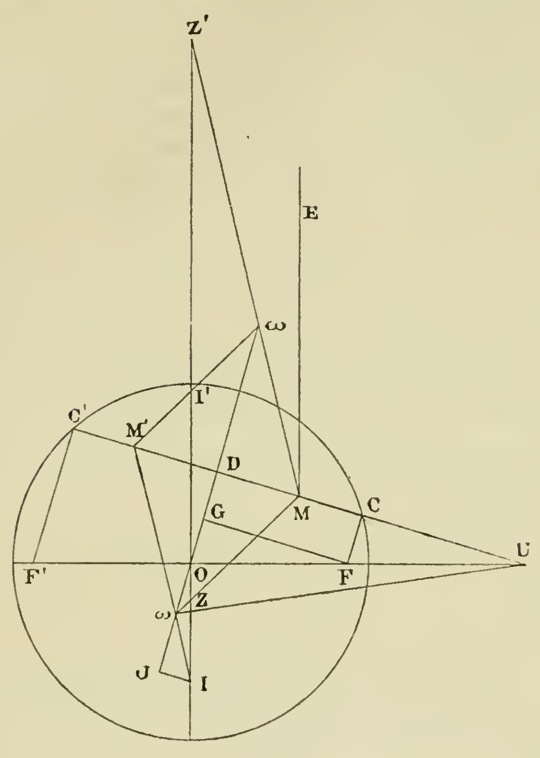


Fig. 24

il s'agit dans l'énoncé. Il faut prouver que ces points sont de côtés différents de O, et que c est moyenne proportionnelle entre OZ et OZ'.

Menons ME parallèle au second axe; prenons, sur la tangente, le symétrique M' de M par rapport à D, et joignons-le à ω ainsi qu'à ω'; U désignant le point où la tangente rencontre l'axe focal, qui sert ici de droite des contacts, si l'on tire ωU, l'angle UωM' sera droit [**41**]. Supposons d'abord OD < CD; ω sera sur le prolongement de DO, et Z au-dessous de O; alors on aura $\widehat{D\omega U} < \widehat{DOU}$. Le premier de ces angles est égal à DMω, par

(*) ω' est placé sur MZ', au point marqué ω par une erreur de la figure.

suite à $DM\omega'$; le second est égal à DME ; on a donc $\widehat{DM\omega'} < \widehat{DME}$, ce qui exige que Z' soit au-dessous de O. Au contraire, pour $OD > CD$, ω et Z se trouveront au-dessus de FF′ ; on aura $\widehat{D\omega U} > \widehat{DOU}$, d'où $\widehat{DM\omega'} > \widehat{DME}$, et Z' sera au-dessous de O.

Soient maintenant I et I′ les points d'intersection de $M'\omega$ et de $M\omega'$ avec le second axe ; abaissons IJ perpendiculaire sur OD. Les triangles semblables OIJ, ODU donnent $OD.OJ = DU.IJ$, et, les triangles $IJ\omega$, $DU\omega$, $\omega D.\omega J = DU.IJ$; il vient donc $OD.OJ = \omega D.\omega J$. Ainsi, entre les lignes OJ, ωJ, il y a non seulement même différence $O\omega$ qu'entre les lignes ωD, OD, mais aussi même rapport, par conséquent les deux premières sont respectivement égales aux deux autres, d'où résulte $OJ = \omega D = CD$. Menons, par F, une parallèle à CD jusqu'à sa rencontre en G avec OD ; on aura aussi $FG = CD$; les deux triangles rectangles OIJ, OFG seront égaux, et il viendra $OI = OF = c$. On démontrerait de même l'égalité $OI' = c$.

Enfin, les triangles $O\omega Z$, $O\omega' Z'$ étant respectivement semblables à $OI'\omega'$, $OI\omega$, on a

$$OZ = c\,\frac{O\omega}{O\omega'}, \qquad OZ' = c\,\frac{O\omega'}{O\omega},$$

d'où résulte

$$OZ.OZ' = c^2.$$

44. — *Le centre d'un cercle bitangent, le saillant et les deux points de contact du cercle et de la conique se trouvent, avec les foyers, sur une même circonférence.*

Soient O (*fig.* 25) le centre de la conique, S, S′ et H, H′ les points de rencontre des deux axes avec la tangente et avec la normale en un point L de la courbe ; H, H′ seront les centres, S, S′ les saillants de deux cercles bitangents d'espèces différentes ayant un point de contact commun en L. Les triangles semblables OHH′, OSS′ donnent $OH'.OS' = OH.OS$. Le second produit étant égal à à c^2 [19], il en sera de même du premier ; on a donc

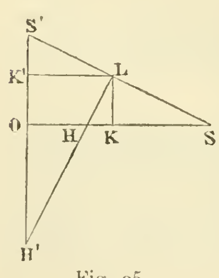


Fig. 25

$$OH'.OS' = c^2,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

45. — De L (*fig.* 25), abaissons, sur les axes, les perpendiculaires LK, LK′. A cause de la similitude des triangles OHH′, HKL, H′K′L, les lignes OH′, OK′, H′K′ sont proportionnelles à OH, HK, OK, par conséquent [**22**] à c^2, b^2, a^2. Si donc on désigne par h', k', s' les distances du centre de la conique au centre du cercle bitangent de seconde espèce, à la corde des contacts, au saillant, et, par δ', celle du centre du cercle à la corde des contacts, on aura, en tenant compte de la relation du paragraphe précédent,

$$\frac{a^2}{\delta'} = \frac{b^2}{k'} = \frac{c^2}{h'} = s'.$$

Quant aux deux rayons H′L, HL, ils sont entre eux dans le rapport de a^2 à b^2.

On voit que la droite des contacts est, dans l'ellipse, la polaire du saillant par rapport au cercle décrit sur le petit axe comme diamètre, ce qui résulte d'ailleurs [**1**] de ce que ce cercle est bitangent de première espèce, avec le second axe pour droite des contacts. Lorsque la conique est une hyperbole, la droite des contacts est symétrique, par rapport au centre, de la polaire du saillant dans le cercle de rayon b concentrique à l'hyperbole.

Ce que nous venons de dire du saillant et de la droite des contacts s'applique à tout point du second axe et à sa polaire par rapport à la conique. On en conclut que, pour un cercle bitangent donné, le saillant et le milieu de la corde des contacts sont les seuls points du second axe ayant, dans ce cercle, la même polaire que dans la conique. La démonstration du § **5** se trouve ainsi complétée. (*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 32).

11. — *De quelques problèmes et conséquences.*

A l'aide de ce qui précède, on pourra résoudre facilement les problèmes qui suivent.

Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant :

1° a, b, c, d;
2° b, d, m, n;
3° R, SA × SB, QA × QD, a;
4° SA × SB, QA × QD, a, b;
5° SA × SB, QA × QD, b, d;
6° QA × QD, d, a, b;
7° h^2, k^2, l^2 et R ou S.

Les premières formules du n° 6 conduisent aux égalités :

$$\frac{IA}{IC} = \frac{d \cdot QB}{b \cdot QD}, \qquad \frac{ID}{IB} = \frac{d \cdot Qc}{b \cdot QA},$$

$$\frac{SA}{SB} = \frac{d \cdot QA}{b \cdot QB}, \qquad \frac{Sc}{SD} = \frac{d \cdot QD}{b \cdot QC}.$$

De ces égalités, il résulte que si QAD est fixe et si QA, QD, QC, QB sont constants, lorsqu'on fait tourner QcB autour de Q, les points I et S décrivent des circonférences.

En considérant AD et BC comme les diamètres de deux cercles perpendiculaires au plan de la figure (*fig.* 1), la circonférence de diamètre BC engendre, en tournant autour de l'axe perpendiculaire, de trace Q, la surface d'un tore, et la circonférence décrite par le point S est le lieu géométrique des points de vue d'où les perspectives des méridiens d'un tore sur un tableau fixe passant par son axe sont un seul et même cercle.

Si, étant donné l'axe radical de deux cercles O et O′, on fait tourner l'un d'eux d'un angle quelconque autour de cet axe, de manière à lui faire occuper la position O″, les deux cercles O et O″ appartiennent à un même cône, et le lieu de son sommet est une circonférence.

12. — *Du point de rencontre* L *des bissectrices des angles* S *et* Q *du quadrilatère complété* (*fig.* 5). *Formules de* SL *et* QL.

Les propriétés des bissectrices d'un triangle conduisent à

$$\frac{BE'}{h^2} = \frac{AE'}{l^2} = \frac{a}{(a+c)(d+b)} = \frac{a}{h^2+l^2},$$

$$\frac{BG_1}{h^2} = \frac{CG_1}{l^2} = \frac{b}{(a+c)(d+b)} = \frac{b}{h^2+l^2},$$

$$\frac{CE_1}{l^2} = \frac{DE_1}{h^2} = \frac{c}{(a+c)(d+b)} = \frac{c}{h^2+l^2},$$

$$\frac{AG'}{l^2} = \frac{DG'}{h^2} = \frac{d}{(a+c)(d+b)} = \frac{d}{h^2+l^2},$$

$$SG' = \frac{2dhl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d^2-b^2)}, \quad SG_1 = \frac{2bhl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d^2-b^2)},$$

$$G_1G' = \frac{2hl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d+b)}, \quad SL = \frac{hl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d-b)},$$

$$QE' = \frac{2ahl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(d+b)(a^2-c^2)}, \quad QE_1 = \frac{2chl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(d+b)(a^2-c^2)},$$

$$E'E_1 = \frac{2hl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a+c)(d+b)}, \quad QL = \frac{hl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a-c)(d+b)}.$$

On vérifie aisément que :

$$\overline{SL}^2 + \overline{QL}^2 = \overline{SQ}^2,$$

ainsi l'angle SLQ est droit, résultat connu. Le quadrilatère $E_1G_1E'G'$ est donc un losange dont le côté θ et la hauteur ζ sont donnés par les formules :

$$\theta = \frac{hkl}{(a+c)(d+b)}, \quad \zeta = \frac{2hlS}{k(a+c)(d+b)}.$$

Nota. — Les côtés du losange sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

Corollaire. — Le point L coïncide avec ω si on l'a :

$$a + c - (d+b) = \varepsilon = 0.$$

13. — *Rappel des déterminations trigonométriques des angles de la fig.* 5 A, B, C, D, I, S, Q.

$$\cos A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2l^2}, \quad \cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2h^2},$$

$$\cos C = \frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2l^2}, \quad \cos D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2h^2};$$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{l}, \quad \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{(p-c)(p-d)}}{h},$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-d)}}{l}, \quad \cos\frac{D}{2} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{h};$$

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-d)}}{l},\qquad \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{h},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{l},\qquad \sin\frac{D}{2}=\frac{\sqrt{(p-c)(p-d)}}{h};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-d)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{(p-a)(p-b)}};$$

$$\cos I=\frac{a^2+c^2-d^2-b^2}{2k^2},\qquad \cos S=\frac{h^4+l^4-(d^2-b^2)^2}{2h^2l^2},$$

$$\cos Q=\frac{h^4+l^4-(a^2-c^2)^2}{2h^2l^2};$$

$$\cos\frac{I}{2}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-d)}}{k},\qquad \cos\frac{S}{2}=\frac{(d+b)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl}.$$

$$\cos\frac{Q}{2}=\frac{(a+c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl};$$

$$\sin\frac{I}{2}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{K},\qquad \sin\frac{S}{2}=\frac{(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl},$$

$$\sin\frac{Q}{2}=\frac{(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl};$$

$$\operatorname{tg}\frac{I}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{S}{2}=\frac{(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(d+b)\sqrt{(p-b)(p-d)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{Q}{2}=\frac{(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}.$$

14. — *Coordonnées des sommets du quadrilatère par rapport aux deux droites* LQ *et* LS, *comme axes. Coordonnées de* I.

Soient x_1y_1(A); x_2y_2(B); x_3y_3(C); x_4y_4(D); ces coordonnées. On trouvera :

$$\frac{x_1}{-dm}=\frac{x_2}{-bn}=\frac{x_3}{bm}=\frac{x_4}{dn}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{k(d+b)},$$

$$\frac{y_1}{-am}=\frac{y_2}{an}=\frac{y_3}{cm}=\frac{y_4}{-cn}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-d)}}{k(a+c)}.$$

Les distances du point L aux quatre sommets seront données

par :

$$\frac{\frac{1}{m^2}\overline{LA}^2}{\left(\frac{a}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)+\left(\frac{d+b}{d}\right)^2(p-a)(p-c)}$$

$$=\frac{\frac{1}{n^2}\overline{LB}^2}{\left(\frac{b}{d+b}\right)^2(p-a)(p-c)+\left(\frac{a}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)}$$

$$=\frac{\frac{1}{m^2}\overline{LC}^2}{\left(\frac{c}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)+\left(\frac{b}{d+b}\right)^2(p-a)(p-c)}$$

$$=\frac{\frac{1}{n^2}\overline{LD}^2}{\left(\frac{d}{d+b}\right)^2(p-a)(p-c)+\left(\frac{c}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)}=\frac{1}{k^2}.$$

Les coordonnées de I sont :

$$x=\frac{bd(a-c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl(d+b)}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2\gamma(\delta^2-\beta^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$

$$y=\frac{ac(d-b)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl(a+c)}, \quad \text{ou} \quad \frac{\beta^2\delta(\gamma^2-\alpha^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$

(*voir* n° 17)

15. — *Coordonnées du centre* O.

On établit d'abord les égalités

$$\overline{OG}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}d^2, \quad \overline{OG_1}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}b^2,$$

$$\overline{OE}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}a^2, \quad \overline{OE_1}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}c^2;$$

on en déduit :

$$x=-\frac{(a-c)hl}{4(b+d)\sqrt{(p-a)(p-c)}} \quad \text{ou} \quad -\frac{\gamma\beta^2(\delta^2+\alpha^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$

$$y=-\frac{(d-b)hl}{4(a+c)\sqrt{(p-b)(p-d)}} \quad \text{ou} \quad -\frac{\delta\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$

(n°s 16, 17, 18).

Si le quadrilatère est en même temps circonscriptible, on a $OL = O\omega$ dont l'expression devient :

$$\frac{h^2l^2f}{2S(a+c)(d+b)}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha\beta\mu\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$ (n°s 16, 17, 18).

(*A suivre*).

UNE QUESTION D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **Delannoy**.

L'une quelconque des équations

$$2t^3 \pm 1 = t'^3, \qquad 2t^3 \pm 2 = t'^3, \qquad t^3 \pm u^3 = 4t'^3,$$

est impossible en nombres entiers (P. F. Teilhet) (*).

Dans ses *Éléments d'Algèbre* (édition 1798, t. II, § **247**, p. 355), Euler a démontré que l'équation $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ est impossible, si ce n'est dans le cas évident $y = x$.

Il est facile, en suivant le mode de démonstration d'Euler, de démontrer également l'impossibilité de

$$2x^3 \pm 2y^3 = 8z^3 \quad \text{ou} \quad x^3 \pm y^3 = 4z^3.$$

Posons

$$\frac{x+y}{2} = p, \quad \frac{x-y}{2} = q, \quad \text{d'où} \quad x = p + q, \quad y = p - q;$$

$$x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Il faut prouver que cette quantité ne peut être égale au quadruple d'un cube, ou que $\frac{p}{2}(p^2 + 3q^2)$, ne peut être un cube.

Il y a deux cas à considérer, suivant que p est ou n'est pas multiple de 3.

1° p n'est pas divisible par 3.

On réduira $p^2 + 3q^2$ en cube en posant

$$p = t(t^2 - 9u^2),$$
$$q = 3u(t^2 - u^2).$$

Il faut encore que $\frac{p}{2}$ ou $\frac{t}{2}(t + 3u)(t - 3u)$ soit un cube. Ces trois facteurs, étant premiers entre eux, doivent être chacun un cube.

Si $t + 3u = f^3$ et $t - 3u = g^3$, il vient

$$2t = f^3 + g^3,$$

(*) Les deux premières parties de ce théorème ont été posées en question, sous le n° 749, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* où cette solution n'a été que très sommairement indiquée, faute de place.

ou

$$4\frac{t}{2} = f^3 + g^3 = 4h^3,$$

et on aurait deux cubes beaucoup plus petits, dont la somme serait le quadruple d'un cube.

2° $p = 3r$, la formule devient

$$\frac{3r}{2}(9r^2 + 3q^2) = \frac{9r}{2}(3r^2 + q^2).$$

On transforme $3r^2 + q^2$ en cube, en posant

$$q = (t^2 - 9u^2)t,$$
$$r = 3u(t^2 - u^2);$$

d'où

$$\frac{9r}{2} = 27\frac{u}{2}(t^2 - u^2).$$

Il faut que $\frac{u}{2}(t + u)(t - u)$ soit un cube. Comme ces trois facteurs sont premiers entre eux, il faut que chacun soit un cube.

Soit

$$t + u = f^3,$$
$$t - u = g^3;$$

d'où $\qquad 2u = f^3 - g^3, \quad$ ou $\quad 4\frac{u}{2} = f^3 - g^3.$

Mais $\frac{u}{2}$ doit être un cube; nous aurions, en bien plus petits nombres, deux nombres dont la différence serait le quadruple d'un cube.

Puisqu'on ne peut assigner, en petits nombres, des cubes tels que leur somme ou leur différence soit le quadruple d'un cube, il est clair que cela n'a pas lieu non plus pour les grands nombres.

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

(*Suite*; 1897, voir p. 29)

Si nous cherchons les circonférences radicales du faisceau que l'on obtiendrait, et de la circonférence donnée, elles passeront par le point ρ, d'où il suit que l'on aura les susdites lignes en joignant un point quelconque du diamètre perpendiculaire à HK avec le centre O; puis, en prenant comme centre le milieu I de cette droite et pour rayon la distance Iρ.

Si la circonférence (O) dégénère aussi en un *cercle point*, nous aurons à trouver la circonférence anti-radicale d'un point O par rapport à un autre point ρ; il est facile de voir, qu'il suffira, pour l'obtenir, de prolonger Oρ d'une longueur $\rho O' = O\rho$. On a ainsi le centre O'; le rayon R' aura pour valeur $d\sqrt{2}$; il en résulte, par conséquent, que la circonférence anti-radicale d'un point par rapport à un autre point est toujours réelle et que ces deux points sont inverses par rapport à la circonférence.

Si le point O reste fixe et que l'autre se meuve sur la ligne Oρ, l'hyperbole équilatère H, enveloppe des cercles anti-radicaux, que nous considérons dans le cas où nous associons une circonférence et un point, dégénère dans ce cas en deux droites qui ont pour équation

$$y = \pm x;$$

ce sont les asymptotes de l'hyperbole H.

Puisque deux points et la circonférence anti-radicale sont tels que les susdits points sont *les points limites*, nous pourrions citer plusieurs propriétés correspondantes ; nous nous bornerons à énoncer la suivante, que nous aurons à utiliser dans la suite.

Si l'on joint un point quelconque A, *du plan, aux deux points* O *et* ρ *et que, sur les extrémités de* AO *et* Aρ, *on élève des perpendiculaires, ces droites et la polaire de* A *par rapport à la circonférence anti-radicale correspondant aux points* O, ρ, *sont concourantes.*

Si l'on veut trouver le lieu géométrique des points d'intersec-

tion de ces droites, lorsque A décrit une certaine ligne, il faudra avoir recours aux formules suivantes, bien faciles à obtenir,

$$x = d - X, \quad y = \frac{X(X - d)}{Y};$$

en appelant d la distance Oρ, et en prenant pour axes cartésiens la droite Oρ et la perpendiculaire en O. Ces formules font voir que si le point A décrit une droite passant par O, le point correspondant décrit une autre droite, perpendiculaire, en O, à la première. Lorsque le point A décrit une droite parallèle à l'axe des y, le point correspondant décrit une autre parallèle.

Si le point décrit une parallèle à l'axe des x, l'autre point décrit une parabole. Tout cercle qui passe par Oρ se correspond à lui-même. A la parabole ayant pour équation $x^2 = 2py$, correspond une hyperbole, etc...

Etant donnée une circonférence (O′), sur un de ses diamètres, il n'y a que deux points O et ρ (ou les symétriques par rapport à O′), tels que le cercle anti-radical de O par rapport à ρ soit (O′). Nous pourrions nommer ces points, ainsi liés à chaque circonférence du plan, *points radicalement associés à la susdite circonférence*. Si l'on ne fixe pas le diamètre, dans ce cas les lieux géométriques de O et ρ sont deux circonférences concentriques à la proposée ; le rayon de l'une est double de celui de l'autre et celui de (O′) est, par rapport à ceux-ci, la moyenne proportionnelle. Nous pourrions donner aussi à ces cercles la dénomination de *cercles radicalement associés à* (O′). D'ailleurs, et en vertu de ce que nous venons de dire, on peut déduire la proposition suivante.

On considère une circonférence de centre O *et ses deux circonférences radicalement associées, et l'on trace un rayon quelconque* oabc (a, b et c sont les points où il coupe successivement les trois circonférences). *Si nous joignons un point quelconque* A *du plan aux points* a *et* c *et que nous élevions des perpendiculaires, en ces points, aux droites obtenues, les perpendiculaires et la polaire de* A *par rapport au cercle donné sont concourantes.*

Si l'on prend en particulier le point A sur la circonférence donnée (O) il en résulte cette autre proposition.

Les perpendiculaires aux extrémités des droites qui joignent un point A *d'une circonférence aux extrémités d'un même*

rayon des circonférences radicalement associées se coupent sur l : tangente en A à la circonférence primitive; par conséquent, cette tangente est le lieu géométrique des intersections de toutes les perpendiculaires relatives au point A.

Si les coordonnées de deux points A et A′ sont respectivement a et b, a' et b' l'équation de la circonférence anti-radicale de A par rapport à A′ est :

$$x^2 + y^2 + 2(a - 2a')x + 2(b - 2b')y + 2(a'^2 + b'^2) - (a^2 + b^2) = 0.$$

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 38)

MÉTHODE DES INDIVISIBLES

Les grecs, amoureux du plastique, n'avaient pas su dégager l'idée de l'infini. Leur système cosmique rétrécissait l'univers, comme leur mythologie rétrécissait la nature ; Leucippe et Démocrite, qui avaient imaginé les atomes et proclamé l'existence de mondes sans nombre, n'avaient obtenu qu'un succès relatif ; la méthode d'exhaustion contenait bien, en germe, la méthode infinitésimale, mais — pour se mettre à l'abri des disputes des rhéteurs, — ils n'en avaient pas exprimé le principe, et à chaque fois qu'ils l'employaient, il fallait recommencer toute la période des démonstrations. Satisfaits des résultats particuliers obtenus à l'aide de ce merveilleux instrument, ils n'avaient pas cherché à le rendre plus simple et plus commode.

Mais, au XVIe siècle, le sentiment de l'infini se faisait jour et gagnait d'autant plus de terrain que, — sous l'influence du prodigieux souffle de vie qui animait la production des savants de la Renaissance, — on commençait à s'attaquer à la Scolastique, — cette roue majestueuse tournant à vide, — et que la raison, se révoltant contre l'autorité d'Aristote, tentait de rejeter les béquilles avec lesquelles il avait voulu qu'elle se promenât à sa suite. Bernard Palissy ramène la philosophie à l'étude de la nature ; Galilée crée la méthode expérimentale ; l'invention du

télescope et du microscope rend palpable, pour ainsi dire, l'existence de l'infiniment grand et de l'infiniment petit; l'infini mathématique, qu'on voyait déjà dans les écrits d'Oresme et de Cusa, est devenu familier aux esprits. C'est alors que naquit la *méthode des indivisibles*.

KEPLER

On peut considérer Kepler comme l'auteur de cette méthode. Servi par une puissante faculté de travail et une imagination brillante et aventureuse, il avait osé concevoir comme accessible à l'esprit humain, la découverte des lois du mouvement des corps célestes et entreprendre cette recherche, qu'il put mener à bonne fin, en déduisant de l'observation et d'immenses calculs d'essai les lois qui portent son nom, — les plus générales que nous connaissions dans la nature — lois alors empiriques, il est vrai, mais dont Newton a révélé plus tard l'exactitude.

Le génie novateur de Kepler a aussi ouvert à la Géométrie des horizons nouveaux particulièrement dans la partie dont nous retraçons l'histoire. S'étant occupé incidemment de l'évaluation de la contenance des tonneaux, il imagina (*nova stereometria doliorum*, Linz, 1615), de considérer les corps produits par la révolution des sections coniques — non plus autour de leur axe, ce qu'avait fait en partie Archimède — mais autour d'une droite quelconque de leur plan, ce qui lui donna quatre-vingt-sept solides nouveaux, auxquels il imposa des noms spéciaux et dont il essaie de trouver la cubature. Le grand nombre de problèmes qu'il s'était proposés — et qu'il ne résout du reste que pour le cas du cercle et d'une ellipse dont un des axes est parallèle à l'axe de rotation, — l'amenèrent à chercher la simplification des méthodes connues. Il aborde franchement l'idée de l'infini : ainsi la circonférence est un polygone d'une infinité de côtés; le cercle est composé d'une infinité de triangles ayant pour sommet commun le centre, pour hauteur, le rayon, et pour bases les côtés infiniment petits de la circonférence. La sphère peut être considérée comme l'assemblage d'une infinité de cônes ayant leur sommet commun au centre et leurs bases formées des parties infiniment petites de la surface sphérique.

Mais sa méthode repose surtout sur l'idée de la transformation

des figures et l'emploi de la proposition générale suivante, que nous appellerons *théorème de Kepler*, bien qu'il ne l'ait pas énoncé formellement, et encore moins démontré.

(G) *Si deux solides compris entre deux plans parallèles sont tels qu'un plan quelconque parallèle entre les deux premiers coupe les deux solides suivant deux sections égales, ces deux solides ont des volumes égaux.* Cette proposition peut se démontrer aisément à l'aide du théorème d'Archimède (F) et du théorème d'Eudoxe (A), en montrant préalablement que deux cylindres de même hauteur et à bases quelconques mais égales sont égaux. L'extension est facile au cas où le plan sécant détermine des sections en proportion constante, ainsi qu'à celui de deux figures planes comprises entre deux parallèles et telles qu'une transversale parallèle quelconque y détermine deux segments proportionnels.

Nous avons dit que Kepler a trouvé le volume produit par un cercle ou une ellipse tournant autour d'une parallèle quelconque à un axe (*annulum*, aujourd'hui *tore*, si la droite est extérieure, et *malum* si elle est intérieure). Voici, par exemple, l'ingénieuse construction qu'il donne pour ce dernier cas. Sur le demi-cercle ou la demi-ellipse (*fig.* 20) (*) comme base, construisons un cylindre droit que nous couperons par un plan passant par l'axe AC et le point E situé sur la génératrice BE à une hauteur BE égale à la circonférence ayant BD pour rayon. Un plan quelconque $M\mu m$, parallèle au plan EBD, coupe ce solide suivant un triangle égal au cercle ayant μm pour rayon. Par conséquent, ce solide et celui, — sphère ou sphéroïde, — produit par la révolution de ABC autour de AC sont dans le cas du théorème (G) et sont par conséquent égaux. Par la parallèle MP à AC, menons deux plans $M\pi$, MNP, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle au plan ABC. Le volume proposé produit par la révolution de MNP autour de MP égale le solide MPNE; en effet, menant le plan STR parallèle au plan EDB, on voit que SR égale la circonférence ayant TR pour rayon. Or, le solide MPNE se déduit du solide AECB en en retranchant d'abord deux fois le solide $AM\mu m$

(*) Nous avons substitué à la figure donnée par Kepler, une autre figure, plus claire et plus complète.

égal au volume obtenu en faisant tourner le segment $A\mu m$ autour de sa flèche, volume qu'Archimède a appris à mesurer; ensuite le prisme $p\mu M$; enfin le cylindre $M\pi BN$.

On comprend que les esprits durent être frappés de la simplicité des procédés de Kepler et qu'on dût essayer de les étendre et d'établir ses principes sur des bases rigoureuses. Aussi voit-on Guldin, G. de Saint-Vincent, Cavalieri, Descartes, Fermat, Roberval, Tacquet, Pascal, s'inspirer des idées lumineuses contenues dans l'ouvrage de Kepler.

(*A suivre*).

EXERCICES (*)

9. — *En un point* M *d'une ellipse, de centre* O, *on mène la normale sur laquelle on prend deux longueurs* MN, MN′ *égales au demi-diamètre* OM′, *conjugué de* OM. *On prend aussi sur la normale en* M′, *deux points* N_1, N'_1 *tels que* $M'N_1 = M'N'_1 = OM$. *Montrer que si* N *et* N_1 *sont situés chacun du même côté de la tangente en* M *et de la tangente en* M′ :

1° *La somme des carrés des côtés du quadrilatère* $NN'N'_1N_1$ *est constante et égale à la somme des carrés des axes de l'ellipse donnée;*

2° *Lorsque* M *se déplace sur l'ellipse donnée, chacune des droites* NN_1 *et* $N'N'_1$ *enveloppe un cercle.*

10. — *Rendre rationnelle l'équation*

$$b^2(ax)^{\frac{4}{3}} - a^2(by)^{\frac{4}{3}} = a^2b^2\left[(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

11. — *On considère une parabole* P *et une droite* D *parallèle à l'axe de* P. *Soient* M *un point quelconque pris sur* D *et* AB *la corde polaire de* P *par rapport à* M. *Montrer que :* 1° *le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MAB *est une droite perpendiculaire à l'axe;* 2° *le lieu de l'orthocentre du triangle* MAB *est une ligne droite passant par le sommet de la parabole.*

12. — *Soient* A′, B′, C′ *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC. *On prend sur chacun des côtés le point conjugué harmo-*

(*) Par M. Barisien.

nique du pied de la hauteur par rapport aux extrémités du côté : soient A″, B″, C″ *ces points.*

Montrer que :

1° *Les droites* AA′, BB″ *et* CC″ *sont concourantes ;*

2° *Les droites* BB′, AA″ *et* CC″ *sont concourantes ;*

3° *Les droites* CC′, AA″ *et* BB″ *sont concourantes ;*

4° *Calculer l'aire du triangle formé par les trois droites* AA″, BB″, CC″, *en fonction des côtés du triangle* ABC.

13. — *Calculer à* 0,001 *près l'expression* (*)

$$\frac{\pi^\pi \times e^e}{\pi^e \times e^\pi} - 1.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. A. Mannheim..... Par un point fixe o, on mène un plan normal à une surface $[m]$ en un point m de cette surface. Dans ce plan, on élève, du point o, une perpendiculaire à om, et l'on porte sur cette droite le segment om_1 égal à om. Lorsqu'on fait varier la position du point m sur $[m]$, le point m_1 se déplace sur une surface $[m_1]$, qui est la *surface apsidale* de $[m]$.

Il résulte de cette définition et de la solution de la question 697 (page 23) que *l'apsidale d'un plan* (P), par rapport à un point arbitraire o est *un cylindre de révolution* dont l'axe est la perpendiculaire abaissée de o sur (P) (**).

La solution de la question 698 (page 48) montre que *l'apsidale de ce cylindre de révolution*, par rapport au même point o, se compose d'*une sphère de centre* o, *du plan* (P) *et de son symétrique par rapport à* o.

Les questions 697 et 698 conduisent donc à ce résultat :

Si un cylindre de révolution est l'apsidale d'un plan, ce plan, seul, n'est pas l'apsidale de ce cylindre.

D'une façon générale, j'ai montré (***) que, contrairement à ce qui avait été dit : *Si* A *est l'apsidale de* B, *cette dernière surface*

(*) On trouvera une valeur voisine de 0,06.

(**) La solution de la question 697 donne aussi la réponse à la question 942 posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiques*.

(***) *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 15 juin 1896.

n'est pas l'apsidale complète de A, *par rapport au même pôle*, ou encore : *Deux surfaces ne peuvent être apsidales l'une de l'autre.*

BACCALAURÉATS

(AVRIL 1896).

Académie de Lyon.

1° *Questions au choix* : (*a*) Décomposer le trinôme $x^4 + px^2 + q$ en un produit de deux trinômes du second degré ;

(*b*) Exposer la théorie des annuités ;

(*c*) Progressions géométriques ; sommation des termes d'une telle progression. Entre deux nombres donnés a et b insérer n moyens géométriques.

2° *Problème* (obligatoire). — On donne une sphère dont le rayon $R = 4$, et l'on demande de trouver le rayon de la base et la hauteur de cône de volume minimum circonscrit à cette sphère.

Académie de Montpellier.

Calculer les côtes d'un triangle isoscèle connaissant : l'aire de ce triangle et la surface totale du cône qu'il engendre en tournant autour de sa hauteur. Discuter.

Académie de Nancy.

1° *Questions au choix :* (*a*) Démontrer que toutes les lignes trigonométriques de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de tang $\frac{a}{2}$;

(*b*) Connaissant tang a, calculer sin $\frac{a}{2}$. — Discuter.

(*c*) Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

2° *Problème.* — Etudier la variation du quotient :

$$\frac{21x^2 - 8x - 5}{14x^2 - 31x - 15},$$

quand x varie d'une façon continue de $-\infty$ à $+\infty$.

Académie de Poitiers.

1° *Questions au choix :* (*a*) Démontrer les formules d'addition pour le sinus et pour le cosinus.

(*b*) Connaissant tang a, calculer tang $\frac{a}{2}$. — Discussion.

(*c*) Démontrer qu'entre les angles et les côtés d'un triangle quelconque existent les relations

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Déduire de là les formules :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

2° *Problème.* — Une pyramide régulière a pour base un carré. Dans chacun des triangles isoscèles qui forment les faces latérales, on représente la base par $2a$, les autres côtés par y, la hauteur opposée au côté $2a$ par h, la hauteur opposée aux côtés y par x. Calculer x, et calculer le cosinus de l'angle plan qui mesure l'angle dièdre de deux faces latérales. Comment varie cet angle lorsque h décroît à partir de $+\infty$?

Académie de Rennes.

1° *Questions au choix* : (*a*) Dans quel cas dit-on que des relations entre plusieurs variables sont distinctes? Combien y a-t-il de relations distinctes entre les six lignes trigonométriques d'un même angle? Les trouver et montrer pourquoi elles sont distinctes. En déduire les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$.

(*b*) Calculer $\sin \frac{x}{2}$ et $\cos \frac{x}{2}$ en fonction de $\sin x$. Discuter.

(*c*) Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Discussion.

Problème. — On forme : 1° le carré de la somme des carrés des deux entiers consécutifs a, $a - 1$, 2° le carré du double $2a$ du plus grand de ces deux nombres ; montrer que dans la division de ces deux carrés, la partie entière du quotient et le reste sont aussi des carrés. Si a est le nombre qui suit immédiatement un carré, le reste est le carré qui suit immédiatement le quadruple du quotient.

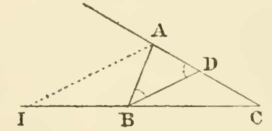
Académie de Toulouse.

Aux extrémités A et B d'un diamètre d'une circonférence donnée de rayon R et de centre O, on mène les tangentes AC et BD à cette circonférence et l'on désigne par C et D les points d'intersection avec une tangente CD de la circonférence. 1° Démontrer que le triangle COD est rectangle et que $AC \times BD = R^2$; 2° Déterminer la tangente CD de manière que l'aire du trapèze ACDB soit équivalente à celle d'un carré de côté donné a ; 3° Déterminer le minimum de l'aire du trapèze ACDB lorsque la tangente CD, menée au cercle, varie.

QUESTION 703

Solution par M. Rebeix (Lycée du Puy).

Si dans un triangle ABC *on suppose* $b = 2c$, *la bissectrice extérieure de l'angle* A *est parallèle à la médiane issue du sommet* B.



En effet, traçons BD parallèle à AI. On sait que le triangle BAD est isoscèle. Donc D est le milieu de AC.

Nota. — Solutions analogues par MM. Jorge d'Avillez, Plakhowo, E. Foucart, Angel Bozal-Obejero, à Madrid, Droz-Farny, L'Huillier, F. Dauzats, Goyens.

QUESTION 705

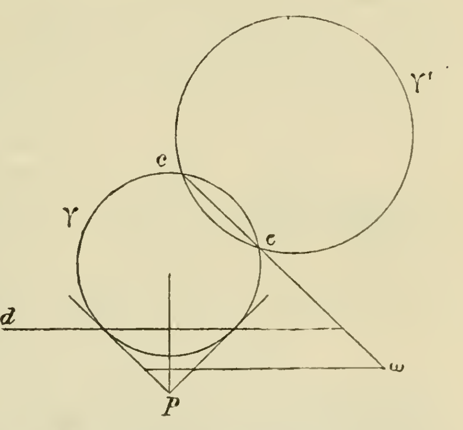
Solution par M. L'Huillier.

A, B, P *étant trois points donnés et* D *une droite fixe, on considère toutes les coniques* Γ *passant par les deux points* A, B *et pour lesquelles* P *est le pôle de* D :

1° *Les secondes cordes communes aux coniques* Γ *et à une conique* Γ′ *menée par les points* A *et* B, *passent par un point fixe* M.

2° *Lorsque la conique* Γ′ *varie, le point* M *engendre une ligne droite.* (Vve F. Prime).

Projetons la figure de façon que les points A et B deviennent les points cycliques, les coniques Γ se transforment en cercles γ ayant même axe radical à savoir la parallèle à d à égale distance de d et p. La conique Γ′ devient un cercle quelconque γ′ et la corde commune ce passe par un point fixe ω sur l'axe radical des cercles γ.



Si γ′ varie, ω décrit l'axe radical des cercles γ.

Nota. — Autres solutions de MM. F. Dauzats, Droz-Farny, Sollertinsky, en prenant pour base de la démonstration le théorème dû à Sturm (si trois coniques ont une corde commune, les trois autres cordes sont concourantes).

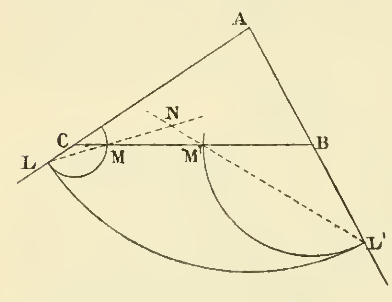
QUESTION 683

Solution, par M. A. Droz-Farny.

Les points remarquables du plan d'un triangle qui se construisent avec le plus de simplicité sont : le centre du cercle circoncrit qui n'exige que douze opérations élémentaires, le centre de gravité et l'orthocentre qui en exigent seize. Montrer qu'on peut construire le point de Nagel, dont les coordonnées normales

sont : $\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$, $\frac{p-c}{c}$ *et le point* M *qui a pour coordonnées normales* $\frac{2a-p}{a}$, $\frac{2b-p}{b}$, $\frac{2c-p}{c}$, *l'un et l'autre aussi avec seize opérations élémentaires, et qu'il en est de même des transformés continus de ces deux points. La démonstration peut se déduire presque immédiatement de la valeur donnée des coordonnées.* (E. Lemoine).

Les coordonnées normales du point N de Nagel étant $\frac{p-a}{a}$, etc.., si l'on prend en coordonnées cartésiennes pour axes des x et des y respectivement les côtés CB et CA du triangle de référence ABC, on a immédiatement pour les coordonnées $x = a - \frac{ab}{p}$, $y = b - \frac{ab}{p}$ d'où $x - y = a - b$, ce qui détermine une droite contenant N et parallèle à la bissectrice de l'angle ACB ; on aurait de même une droite contenant N et parallèle à la bissectrice de l'angle ABC. On en déduit la construction suivante : de A décrivons la circonférence A(a) qui coupe AC et AB en L et L'. Opération ($3C_1 + C_3$).



Décrivons de C la circonférence C(CL) qui coupe CB en M, et de B la circonférence B(BL') qui coupe BC en M'. Op : ($4C_1 + 2C_3$). Les droites LM et L'M' se coupent en N. Op : ($4R_1 + 2R_2$). Op : totale [$4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_3$].

Simplicité 16 ; exactitude 11 ; deux droites et trois cercles.

Pour le point M, on trouverait $x = \frac{2ab}{p} - a$, $y = \frac{2ab}{p} - b$, d'où $x - y = b - a$ et des formules analogues pour les transformés continus de ces deux points. Les constructions géométriques sont donc analogues.

QUESTION 701

Solution, par M. H. L'Huillier.

Résoudre et dicuter l'équation

$$\sin^{10}x + \cos^{10}x = a.$$

(*E. N. Barisien*).

On a $$\sin^2x + \cos^2x = 1,$$

élevant au carré

$$\sin^4x + \cos^4x = 1 - 2\sin^2x\cos^2x.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$\sin^6x + \cos^6x = 1 - 3\sin^2x\cos^2x;$$

multipliant membre à membre les deux dernières, on a

$$\sin^{10}x + \cos^{10}x = 1 - 5\sin^2x\cos^2x + 5\sin^4x\cos^4x.$$

L'équation proposée se réduit à

$$\sin^4 2x - 4\sin^2 2x = \frac{16}{5}(a - 1),$$

équation bicarrée dont la discussion n'offre aucune difficulté.

Nota. — Solution analogue par M. Plackowo.

QUESTIONS PROPOSÉES

793. — D'un point O, pris arbitrairement sur le plan d'un triangle donné, on mène une parallèle à l'un des côtés de ce triangle et l'on prend l'harmonique conjugué de O par rapport aux points où elle coupe les deux autres côtés. Les points obtenus ainsi sur les parallèles menées de O aux trois côtés du triangle appartiennent à une même droite. (*Mannheim*).

794. — On donne une circonférence de cercle et l'un de ses diamètres. D'un point M de la circonférence on abaisse sur ce diamètre la perpendiculaire MP, que l'on partage en M' dans un rapport donné. On mène la droite M'T, qui joint le point M' au point T où la tangente en M au cercle rencontre le diamètre donné. De l'un des points où M'T coupe le cercle on lui élève une

perpendiculaire. Cette droite coupe le diamètre en un point F qui est le même, quel que soit M sur le cercle : c'est ce qu'on propose de démontrer sans considérer l'ellipse, lieu de M', et sans utiliser les propriétés correspondant à cette considération.

(*Mannheim*).

795. — Quelqu'un place une somme inconnue X dans une entreprise. Chaque année il retire unesomme A qui lui est nécessaire pour vivre et, malgré tout, cette entreprise rapporte chaque année $\frac{1}{3}$ *de ce qui reste*, quelle est la somme X, sachant qu'au bout de n années $\frac{1}{2}$, le capital X a été doublé. (*Elgé*).

796. — Etant donné un triangle AOB rectangle en O ; on prolonge OA au-delà du point A de la longueur $AA' = OB$, et on prolonge OB au-delà du point B de la longueur $BB' = OA$. Montrer que l'hypoténuse AB est vue du point milieu de A'B' sous un angle droit. (*E. N. Barisien*).

797. — Dans tout triangle ACB, rectangle en C, on a les relations suivantes entre les rayons des quatre cercles tritangents au triangle ACB.

(*Les lettres* a, b, c, p *ont leur signification habituelle*),

$$r_a + r_b = c,$$
$$2r_c = p,$$
$$r + r_c = a + b,$$
$$r + r_a + r_b + r_c = 2p,$$
$$r + r_a + r_b = r_c,$$
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

(*E. N. Barisien*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTERAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 49)

46. — *Pour tout cercle bitangent, la demi-corde principale d'un point quelconque de l'ellipse, ou la tangente menée d'un point quelconque de l'hyperbole, est, avec la distance du même point à la droite des contacts, dans le rapport de* c *à* b. Nous entendons, par corde principale d'un point intérieur à un cercle, celle dont ce point occupe le milieu.

Soient O (*fig.* 26) le centre d'une ellipse, H celui d'un cercle bitangent, KU la droite des contacts, rencontrant en K l'axe non focal, M un point quelconque de la courbe, MU la tangente en M. L'intersection U de cette tangente avec la droite des contacts appartiendra à la polaire de M par rapport au cercle (4); cette polaire sera donc la perpendiculaire UX abaissée de U sur HM. Puisque M est à l'intérieur du cercle, X sera en dehors ; de ce dernier point, on pourra mener, au cercle, deux tangentes, dont les points de contact seront les extrémités de la corde principale de M. L'un de ces points de contact étant C, le triangle rectangle CHX donnera $\overline{CM}^2 = MH.MX$.

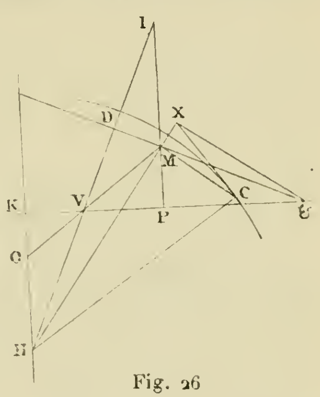


Fig. 26

Abaissons, sur KU, MU, les perpendiculaires MP, HD ; soit I, leur intersection. Les points D, X appartiennent à la circonférence qui serait décrite sur HU comme diamètre, et l'on a MH.MX = MD.MU. De même, dans la circonférence de diamètre IU, on aurait MD.MU = MI.MP. Il vient donc $\overline{CM}^2 = MI.MP$.

Maintenant, si l'on tire OM, cette ligne passera par le point de rencontre V de HD avec KU [**4**], d'où il suit que les lignes MI, MP sont proportionnelles à OH, OK, par conséquent [**45**] à c^2, b^2. On a ainsi

$$MI = \frac{c^2}{b^2} MP, \text{ d'où } CM = \frac{c}{b} MP.$$

Si la courbe est une hyperbole, M se trouvera en dehors, et X en dedans, du cercle; le point de contact de la tangente issue de M sera l'une des extrémités de la corde principale de X, et l'on pourra appliquer, à cette tangente, la démonstration ci-dessus.

De la propriété qui vient d'être établie, il résulte que la droite des contacts est l'un des axes de similitude de trois cercles ayant, pour centres, trois points quelconques de la conique, et, pour rayons, des longueurs égales ou proportionnelles aux cordes principales de ces points, si la courbe est une ellipse, aux tangentes qui en sont issues, si la courbe est une hyperbole.

47. — *Un point étant intérieur à un cercle bitangent dans le cas de l'ellipse (extérieur dans le cas de l'hyperbole), suivant qu'il sera intérieur ou extérieur à la conique, il y aura un rapport plus grand ou plus petit que celui de* c *à* b *entre la demi-corde principale de ce point (la tangente qui en est issue) et la distance du même point à la droite des contacts.*

En effet, pour les divers points d'une perpendiculaire au second axe, la distance à la droite des contacts est la même, tandis que, le point s'éloignant du pied de la perpendiculaire, sa distance au centre du cercle augmente, par conséquent sa corde principale diminue (ou la tangente qui en est issue augmente).

Si, dans le cas de l'ellipse, la perpendiculaire au second axe menée par un point extérieur ne rencontre pas la courbe, son pied sera encore celui de ses points auquel correspondra le plus grand rapport; or, pour lui, le rapport sera plus petit que pour le sommet voisin, car, de ces deux points, c'est le second dont la corde principale est vue, du milieu de la corde des contacts, sous l'angle le plus grand.

48. — La propriété du § 16 a ici son analogue.

Il en est de même, lorsque la conique est une hyperbole, de la propriété du § 17, laquelle permet de construire un cercle bitangent à cette hyperbole et tangent à une droite donnée. Mais, dans le cas de l'ellipse, les tangentes au cercle ne rencontrant pas la courbe, c'est à une autre propriété qu'il faut avoir recours :

Deux lignes parallèles se trouvant tangentes, l'une à une ellipse, l'autre à un cercle bitangent, on prolonge, jusqu'à la seconde, le rayon de l'ellipse, mené au point de contact de la

première, et, on prend, dans cette ellipse, la polaire du point d'intersection. On prolonge ensuite les rayons elliptiques des extrémités de la corde polaire jusqu'à leur rencontre avec la tangente à la conique. La demi-longueur de la portion de droite ainsi déterminée sur cette tangente sera dans le rapport de c *à* b *avec la distance, à la droite des contacts, du point dont on a pris la polaire.*

Soient O (*fig.* 27) le centre de l'ellipse, H celui du cercle, K le milieu de la corde des contacts, lequel est situé sur le prolongement de HO, AB la tangente au cercle en un point A, V l'intersection du rayon AH avec la droite des contacts. Le point M de la conique où la tangente est parallèle à AB se trouvera sur OV [4]; soit B l'intersection de AB avec le prolongement de OM. La polaire de B par rapport au cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire AC abaissée de A sur HB, rencontre la droite des contacts en un point D qui appartiendra à la polaire de B par rapport à l'ellipse [4]; celle-ci sera donc la parallèle menée par D à AB; elle rencontrera les droites AH, BH, BO et la courbe en des points E, L, R et S. Prolongeons OS jusqu'à son intersection T avec la tangente en M à l'ellipse, et abaissons BP perpendiculaire sur KV. Il faut démontrer que le rapport de MT à BP est le même que celui de c à b.

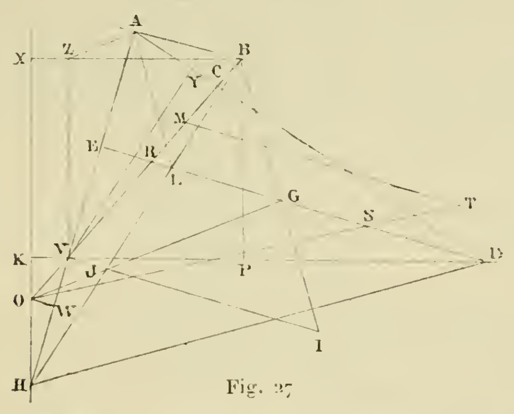


Fig. 27

Les lignes AB, ER étant parallèles, on a

$$AV.RV = BV.EV.$$

De ce que D, E, H, K sont sur une même circonférence, on conclut

$$EV.HV = DV.KV.$$

Construisons la polaire de D, qui est la même dans le cercle et dans l'ellipse [1]; ce sera la perpendiculaire abaissée de B sur DH; soit G le point où elle coupe DE; désignons par I et J ceux où la parallèle menée par V à AB rencontre BG et BH. Les segments GL, LR sont proportionnels à IJ, JV. Dans cette proportion, on peut remplacer GL par AB, car DE, BH étant deux des hauteurs du triangle ADH, la troisième hauteur passera par L, de sorte que, si l'on tire AL, cette ligne sera perpendiculaire à HD ou parallèle à BG, et ABGL sera un parallélogramme. D'après cela, la proportion peut s'écrire

$$AB.JV = IJ.LR.$$

Les lignes IV, GR étant parallèles, on a

$$BR.GI = BG.RV.$$

Les triangles semblables BJV, BLR donnent

$$BV.LR = BR.JV,$$

et les triangles ABH, HJV,

$$AH.JV = AB.HV.$$

Abaissons BX perpendiculaire sur le second axe HK, et VY sur AD. Par les triangles semblables BHX, DVY, on aura $DV.BX = BH.VY$, et, par les triangles ABH, AVY, qui sont aussi semblables, $BH.VY = AH.AV$; il vient donc

$$DV.BX = AH.AV.$$

Enfin, les triangles OBX, OKV donnent

$$OB.KV = OV.BX.$$

Multipliant membre à membre les égalités mises à la ligne dans ce paragraphe, on obtient $OB.GI.JV = OV.BG.IJ$, relation entre les segments déterminés, sur les côtés du triangle BIV, par les points O, G, J, et qui prouve que ces trois points appartiennent à

une même droite. Tirons cette droite. Dans le triangle OGR coupé par JV, qui est parallèle à GR, nous aurons

$$OV.GR = OR.JV.$$

Menons OW perpendiculaire à HV. Les deux quadrilatères homothétiques ABPV, OKVW donneront

$$OK.AB = OW.BP,$$

et, les triangles semblables OHW, HKV,

$$OW.HV = OH.KV.$$

De V, abaissons, sur BX, la perpendiculaire VZ, et tirons AZ. Si, sur BV comme diamètre, on décrivait une circonférence, elle passerait en A, en P et en Z, de sorte que les angles VAZ, BVP sont égaux comme ayant pour mesure les moitiés des arcs soustendus par les cordes égales VZ, BP ; mais les angles AVZ, RDV étant aussi égaux, les triangles AVZ, DRV sont semblables. On en conclut, VZ étant égal à BP,

$$DR.AV = DV.BP.$$

Puisque BG est la polaire de D dans l'ellipse, D et G sont conjugués harmoniques par rapport aux deux extrémités de la corde interceptée sur DG ; cette corde a son milieu en R, et RS en est la moitié, on a donc

$$\overline{RS}^2 = DR.GR.$$

De même, puisque DE est la polaire de B, les points B et R sont conjugués harmoniques par rapport à M et au point diamétralement opposé, et l'on a

$$\overline{OM}^2 = OB.OR.$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités mises à la ligne depuis le commencement de ce paragraphe, sauf les cinq premières, et si l'on observe que OH, OK sont proportionnels à c^2, b^2 [45], et OM, OR, à MT, RS, on obtiendra une relation qui ne sera autre chose que la relation à démontrer, dont on aurait élevé au carré les deux membres après l'avoir mise sous forme d'égalité de produits. (*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 53).

16. — *Données relatives aux axes de coordonnées rectangulaires.*

Soit un losange $E_1G_1E'G'$; posons :

$$LE_1 = LE' = \alpha$$
$$LG_1 = LG' = \beta,$$

et prenons sur les diagonales prolongées, considérées comme axes de coordonnées, $LQ = \gamma \quad LS = \delta$.

Les droites SE_1 SE' et QG_1 QG' forment en se coupant un quadrilatère inscriptible ABCD.

Les formules : $\dfrac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} = r'$, $\dfrac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = r''$, représentent les distances du point L aux droites SE_1 et QG_1 de sorte que la relation :

(note 1) $$\frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}},$$

ou $$\frac{\delta\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \delta^2}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \qquad \text{savoir : } a + c = d + b,$$

s'applique au quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible.

17. — *Coordonnées des points* A, B, C, D, *et formules des côtés* a, b, c, d.

(A) $$x_1 = -\frac{\alpha\gamma(\delta + \beta)}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \quad y_1 = -\frac{\beta\delta(\gamma + \alpha)}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

(B) $$x_2 = -\frac{\alpha\gamma(\delta - \beta)}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \quad y_2 = \frac{\beta\delta(\gamma + \alpha)}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$

$$\text{(C)} \qquad x_3 = \frac{\alpha\gamma(\delta - \beta)}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \qquad y_3 = \frac{\beta\delta(\gamma - \alpha)}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

$$\text{(D)} \qquad x_4 = \frac{\alpha\gamma(\delta + \beta)}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \qquad y_4 = -\frac{\beta\delta(\gamma - \alpha)}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$

d'où :

$$a = \frac{2\beta\gamma\delta(\gamma + \alpha)\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \quad b = \frac{2\alpha\gamma\delta(\delta - \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

$$c = \frac{2\beta\gamma\delta(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \quad d = \frac{2\alpha\gamma\delta(\delta + \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{a}{\beta(\gamma + \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} = \frac{b}{\alpha(\delta - \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

$$= \frac{c}{\beta(\gamma - \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} = \frac{d}{\alpha(\delta + \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = \frac{2\gamma\delta}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

et l'on trouvera réciproquement :

$$\frac{\alpha}{(a - c)(d - b)\sqrt{(p - a)(p - c)}}$$

$$= \frac{\beta}{(a - c)(d - b)\sqrt{(p - b)(p - d)}} = \frac{\gamma}{(d - b)(a + c)\sqrt{(p - a)(p - c)}}$$

$$= \frac{\delta}{(d + b)(a - c)\sqrt{(p - b)(p - d)}} = \frac{hl}{(a^2 - c^2)(d^2 - b^2)}.$$

Ce tableau permettra de transformer les formules fonctions de a, b, c, d en formules fonctions de α, β, γ, δ et inversement.

18. — *Exemples de quelques transformations.*

$$h^2 = \frac{8\alpha\beta\gamma^2\delta^2(\delta\gamma - \alpha\beta)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)^2},$$

$$l^2 = \frac{8\alpha\beta\gamma^2\delta^2(\delta\gamma + \alpha\beta)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{(\delta^2\gamma^2 - \alpha^3\beta^2)^3},$$

$$K^2 = \frac{4\gamma^2\delta^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2} = mn.$$

$$m = \frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \quad n = \frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \quad \frac{m}{n} = \frac{\delta\gamma + \alpha\beta}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

(note 2) $$S = \frac{4\alpha\beta\gamma^2\delta^2}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = f.\frac{2\gamma\delta}{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}} = 2f.LP' \ (*)$$

$$R = \frac{\gamma\delta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2}.$$

Soit λ l'angle de $L\omega$ avec SQ, on a :

$$P\omega - LP' = \frac{\sqrt{abcd} - S}{2f},$$

$$PP' = \frac{p\varepsilon(a-c)(d-b)}{4f(a+c)(d+b)} = \frac{\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\delta^2) - \alpha^2\delta^2(\beta^2+\gamma^2)}{(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)\sqrt{\gamma^2+\delta^2}},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{4(S - \sqrt{abcd})(a+c)(d+b)}{(a-c)(d-b)\left[(a+c)^2 - (d+b)^2\right]}$$

$$= \frac{4(S-\sqrt{abcd})(a+c)(d+b)}{2p\varepsilon(a-c)(d-b)}.$$

Cette expression de $\operatorname{tg}\lambda$ devient indéterminée par l'hypothèse $\varepsilon = 0$ puisque alors $S = \sqrt{abcd}$.

Sa vraie valeur, donnée par la position de la tangente en ω au cercle de diamètre SQ est :

$$\frac{ac(d-b)^2 - bd(a-c)^2}{2(a-c)(d-b)\sqrt{abcd}}.$$

Pour lever l'indétermination, on se servira de :

$$16S^2 = (2a-\varepsilon)(2b+\varepsilon)(2c-\varepsilon)(2d+\varepsilon),$$

en ne gardant que les premières puissances de ε.

On trouvera encore :

$$\mu = \sqrt{\delta^2+\gamma^2},$$

$$f = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta\mu}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \quad \gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2 = \frac{4\theta^2\gamma^2\delta^2}{K^2}, \quad S = \alpha\beta\frac{K^2}{\theta^2},$$

$$SP = \frac{\gamma^2(\alpha^2+\delta^2)(\delta^2-\beta^2)}{\mu(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)},$$

$$QP = \frac{\delta^2(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}{\mu(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)}, \quad OP = \frac{\delta\gamma(\alpha^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2)}{\mu(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)}.$$

(*) Comme conséquence de la formule $S = 2f \times LP'$, on trouvera que l'aire d'un trapèze isocèle est quadruple de celle du triangle ayant pour sommets : les milieux des diagonales, et le point de rencontre des côtés non parallèles.

19. — *Coordonnées des milieux des diagonales et direction de* HK.

milieu de la diagonale AC $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \\ y_1 = -\dfrac{\alpha\beta\delta}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \end{cases}$ milieu de la diagonale BD $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \\ y_2 = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \end{cases}$

d'où

$\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{\delta}{\gamma}$, milieu de HK $\begin{cases} x' = -\dfrac{\alpha^2\beta^2\gamma}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \\ y' = -\dfrac{\alpha^2\beta^2\delta}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \end{cases}$

donc, cette droite passe par L et est parallèle à la direction symétrique de SQ par rapport à LS ; elle passe donc par le milieu M de SQ. Le point L partage HK dans le rapport des diagonales, car :

$$\text{SH} = \frac{\gamma\sqrt{\delta^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \quad \text{QH} = \frac{\delta\sqrt{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

$$\text{SK} = \frac{\gamma\sqrt{\delta^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \quad \text{QK} = \frac{\delta\sqrt{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$

d'où
$$\frac{\text{SH}}{\text{SK}} = \frac{\text{QH}}{\text{QK}} = \frac{m}{n},$$

donc SL est bissectrice de $\widehat{\text{HSK}}$ est QL, de HQK.

La circonférence décrite sur SQ comme diamètre est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances aux points H et K est égal à $\dfrac{m}{n}$, et si l'on prend, sur LM prolongée, MT = ML, la droite HK est divisée harmoniquement par les points L et T.

Abscisse à l'origine de SK ou α'.

Ordonnée à l'origine de QC ou β' :

$$\alpha' = \frac{hl(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a+c)(d+b)^2}, \quad \beta' = \frac{hl(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)^2(d+b)},$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \alpha'\beta' = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma\delta}, \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \frac{\alpha\beta}{\delta}, \quad \beta' = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Les points conjugués F, F′, intersections des diagonales avec QL sont liés par la relation $\text{MF}.\text{MF}' = \dfrac{\mu^2}{4}$ et, comme, d'autre part, $\text{MH}.\text{MK} = \dfrac{\mu^2}{4}$ les quatre points H, K, F, F′ sont sur une même circonférence.

(*A suivre*).

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

(*Suite et fin*; 1897, voir p. 59)

La considération des circonférences radicales et anti-radicales dans la géométrie de triangle, appliquée à des circonférences effectives ou évanouissantes, nous conduirait à des faits bien intéressants, comme nous l'avons observé précédemment dans l'article cité.

Nous nous bornerons à étudier, comme application très simple les circonférences anti-radicales d'un sommet d'un triangle par rapport à un autre.

Soit ABC le triangle proposé et supposons son périmètre parcouru dans un certain sens, par exemple, dans l'ordre alphabétique, nous trouverons la circonférente anti-radicale de A par rapport à B, de B par rapport à C, et de C par rapport à A; nous les désignerons, respectivement, par

$$(C_1), (A_1) \quad \text{et} \quad (B_1).$$

Nous obtiendrons les centres des circonférences, en prolongeant les côtés (dans le sens que l'on considère) d'une longueur égale à eux-mêmes; quant aux rayons, ils auront pour valeurs, $c\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$.

Cherchons l'équation du cercle (A_1).

Nous savons que dans la forme indiquée par M. de Longchamps (J. S. 1886, p. 57) l'équation de tout cercle est

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

u, v et w, étant les puissances des sommets du triangle par rapport au cercle que l'on considère.

Dans le cas où nous sommes placé l'on a :

$$u = 2b^2 - c^2, \qquad v = 2a^2, \qquad w = -a^2;$$

l'équation du cercle (A_1) est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[(2b^2 - c^2)\alpha + 2a^2\beta - a^2\gamma\right] - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

D'une manière analogue, ou par permutation circulaire, l'on obtiendra celles de (B_1) et (C_1).

Si l'on veut avoir le centre radical de (A_1), (B_1) et (C_1) on écrira

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 p_a : b^2 p_b : c^2 p_c.$$

Il coïncide donc avec le centre du cercle circonscrit.

Calculons le rayon du cercle orthotomique.

La puissance de O par rapport à (A_1) est

$$\overline{OA}_1^2 - 2a^2,$$

mais comme

$$\overline{OA}_1^2 = R^2 + 2a^2,$$

il en résulte que le cercle orthotomique a pour rayon R, et coïncide avec le cercle circonscrit.

On devait prévoir ce résultat en observant que les sommets étant les points limités du faisceau auquel appartiennent les cercles anti-radicaux, la circonférence, passant à la fois par les trois sommets, doit être orthogonale à ces cercles ; c'est donc la circonférence orthotomique de (A_1), (B_1), (C_1).

Les polaires du centre du cercle circonscrit par rapport aux cercles que nous étudions, passent par les sommets du triangle tangentiel (*) car les perpendiculaires à OB, OC et OA en leurs extrémités se coupent sur les points en question.

Les polaires dont nous parlons partagent les côtes du triangle fondamental dans le rapport de 2 : 1.

La polaire du sommet A par exemple, par rapport au cercle (A_1) passe par le point A′ symétrique de A par rapport au centre du cercle circonscrit, parce que les perpendiculaires en B et C aux côtés AB et AC se coupent en A′.

Les points B et C étant inverses par rapport au cercle (A_1) il en résulte, que si nous traçons, par C, une corde quelconque mn dans ce cercle, les points m, n, B et A_1 sont *concycliques*.

Comme les points H et K (points où le côté BC coupe le cercle (A_1) sont conjugués harmoniques par rapport à B et C, on a :

$$\frac{HB}{HC} = \sqrt{2} ;$$

par conséquent, pour un point quelconque n de la circonférence (A_1) on a :

$$\overline{nB}^2 = 2\overline{nC}^2.$$

(*) C'est le triangle formé par les points associés au point de Lemoine.

Ainsi, cette circonférence est le lieu géométrique de points I tels que le carré de IB soit le double du carré de IC.

Les polaires d'un sommet quelconque du triangle par rapport aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1) sont concourantes.

Les polaires d'un des points de Brocard, par rapport aux circonférences que nous étudions, passent par le point diamétralement opposé de la circonférence adjointe correspondante. On peut vérifier un fait analogue, si l'on considère les centres isogones et les cercles de Torricelli.

Si sur OA_1, OB_1 et OC_1, comme diamètres, on décrit des circonférences, celles-ci sont les radicales du cercle circonscrit et des cercles (A_1), (B_1) et (C_1). Ainsi on voit d'une autre manière que les axes radicaux de ces derniers passent par O. Les puissances des sommets du triangle par rapport aux cercles de Neuberg et aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1) sont égales et de signes contraires; par exemple, la puissance de C par rapport à N_a est égale, au signe près, à celle de C par rapport à (A_1), c'est, pour ce motif, que les circonférences radicales des cercles énoncés passent par les sommets du triangle fondamental.

L'équation de ces cercles radicaux, par exemple, celle du cercle qui correspond à (N_a) et (A_1) est :

$$(1)\quad (\alpha+\beta+\gamma)\left[(2b^2-c^2)\alpha+3a^2\beta\right]-2a^2\beta\gamma-2b^2\alpha\gamma-2c^2\alpha\beta=0.$$

Si nous voulons calculer le rayon ρ de la circonférence (1), il suffira de substituer dans la formule

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R'^2)-d^2},$$

les valeurs

$$R=a\sqrt{2},\qquad R'=\frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\omega-3},\qquad d=\frac{a}{2}\sqrt{9+\cot^2\omega},$$

on trouve ainsi

$$\rho=\frac{a}{4}\operatorname{cosec}\omega.$$

L'on pourrait obtenir aussi ce résultat en faisant observer que la droite qui joint C au centre du cercle radical est parallèle et égale à la moitié de BN_a.

Les axes radicaux des cercles de Neuberg et des cercles (A_1), (B_1)

et (C_1) passent par les sommets du premier triangle de Brocard (points semi-réciproques du point de Lemoine) et coupent les côtés du triangle fondamental dans le rapport 2 : 1. Par exemple, l'axe radical de (N_a) et (A_1), passe par le sommet A_1 dont les coordonnées sont

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : c^2 : b^2.$$

Les polaires du point de Tarry par rapport aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1), concourent au point de Steiner.

Le triangle des centres $A_1\ B_1\ C_1$ est triplement homologique avec le fondamental ; A, B, C étant les centres d'homologie et les côtés du premier étant les axes de cette homologie.

Entre les côtés du triangle $A_1\ B_1\ C_1$ on a

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 = 7\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

c'est-à-dire que la *puissance totale* du premier triangle est sept fois celle du second.

La polaire du sommet B par rapport au cercle (A_1) est la perpendiculaire à BC au point C ; les axes radicaux des mêmes éléments sont les médiatrices.

Dans le cas particulier ou dans un triangle on a

$$c^2 = 2b^2,$$

(A_1) devient le cercle d'Apollonius.

Si le périmètre est parcouru en sens contraire, il en résultera d'autres cercles (A_2), (B_2) et (C_2) ayant des propriétés analogues à ceux des (A_1), (B_1) et (C_1). De la combinaison des uns et des autres on peut déduire d'autres propriétés ; par exemple, les centres radicaux de (N_a), (A_2), (A_1) ; (N_b), (B_2), (B_1) etc., sont les sommets du premier triangle de Brocard.

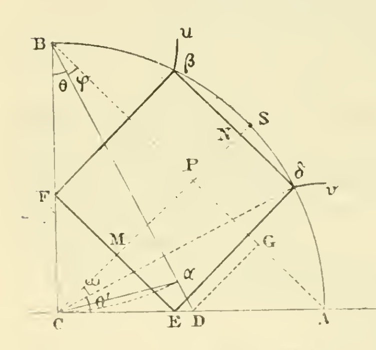
L'on pourrait citer plusieurs autres propriétés ; mais nous nous réservons pour un troisième article l'exposition des applications à la géométrie du triangle, en particulier, qui se déduisent facilement de la considération et des propriétés des *cercles radicaux et anti-radicaux*.

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE (*)

Inscrire dans un quadrant de cercle un carré dont l'un des côtés soit parallèle à la corde de ce quadrant.

Soit D le milieu de AC; traçons BD et, de B comme centre, décrivons l'arc $C\alpha$; des points B, A, comme centres, avec une ouverture de compas égale à la corde $C\alpha$, traçons les arcs u, v, qui donnent les points β, δ sur l'arc BSA ; $\beta\delta$ est le côté du carré cherché.

Pour le démontrer, abaissons DG perpendiculaire sur AB ; nous observerons d'abord que BG = 3AG.



En effet, la bissectrice CS de BCA coupent BA en P, on a

$$AB = 2AP, \qquad AP = 2AG;$$

donc $\qquad AB = 4AG.$

Pour établir que $\beta\delta$EF est un carré, il faut prouver que, comme conséquence de la construction indiquée, on a

$$2EM = MN, \qquad \text{ou} \qquad CN = 3EM.$$

Les deux triangles rectangles DGB, δNC doivent être semblables; les angles ω, φ de la figure doivent donc être égaux. Or, on a

$$\theta + \varphi = \theta' + \omega = \frac{\pi}{4};$$

mais $\theta = \theta'$, donc $\varphi = \omega$; etc...

Remarque. — De cette construction, on déduit, comme l'a fait d'ailleurs observer l'auteur de cette question, une démonstration géométrique de l'égalité

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

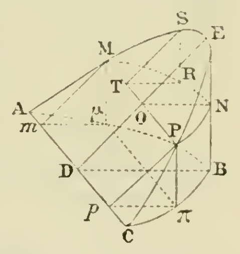
(*) Extrait, avec traduction libre, du Journal *the Educational Times* (n° du 1er février 1897). Cette construction a été proposée sous le n° 13 306, par M. Sanjana. La présente traduction nous a été obligeamment communiquée par M. Brocard. G. L.

NOTICE HISTORIQUE
SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE
Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 62)

CAVALIERI

La recherche de la solution des problèmes de Kepler paraît avoir conduit Cavalieri, dès 1629, à la découverte de sa méthode des indivisibles (*Geometria indivisibilibus continuorum*, Bologne, 1635). Du moins, — malgré la grande généralité de ses figures et de ses applications, — il l'emploie seulement à quelques-uns de ses problèmes. Elle est le corollaire naturel du théorème d'Archimède : au lieu de diviser la figure plane (ou solide en un nombre fini de parallélogrammes (ou de cylindres) inscrits et circonscrits d'égales hauteurs, il la suppose produite par le mouvement d'une droite (ou d'une surface plane), transportée parallèlement à elle-même, en changeant à chaque instant de forme et de grandeur, suivant une loi qui caractérise la figure ; ou, si l'on veut, il la considère comme divisée en tranches infiniment minces, qu'il appelle des *indivisibles*, comme si elle était composée de droites (ou de surfaces planes) superposées. Ainsi, la surface (ou le volume) de cette figure est, par définition, la somme de toutes les droites, *omnes lineæ* (ou de toutes les sections, *omnia plana*) de la figure, parallèles à une direction (*regula*) donnée. Cavalieri n'entend pas, évidemment,



[Fig. 20; appartenant à la p. 64, oubliée par erreur de mise en pages].

(*) Guldin (*De centro gravitatis*, Vienne, 1635), dans le but de mesurer les solides de révolution que n'avait pu traiter Kepler, avait imaginé d'y employer les théorèmes qui portent son nom. D'ailleurs, il ne les démontre pas : la démonstration a été donnée par Antonio Rochas, élève de Cavalieri.

Depuis, Leibniz a remarqué que les théorèmes dits de Guldin s'appliquent à un mouvement quelconque de la figure mobile.

par là, la somme des droites (ou des sections) elles-mêmes, mais celle des parallélogrammes (ou des cylindres) de hauteur infiniment petites, qui ont ces droites (ou ces sections) comme bases. La surface (ou le volume) de cette figure s'obtiendra donc en recherchant la somme des droites (ou des sections) de cette même figure. Comme cette somme est infinie, — ce qui ne mène à aucune conclusion raisonnable, — Cavalieri a recours à un artifice renouvelé d'Archimède, et qui consiste à comparer cette somme infinie à une autre également infinie, ce à quoi il arrive en prolongeant chaque tranche jusqu'au rectangle (ou cylindre) total circonscrit à la figure proposée (*fig.* 21) : au lieu de la surface (ou du volume) $\Sigma.MN$, il n'a qu'à rechercher le rapport $\frac{\Sigma.MN}{\Sigma.KL} = \Sigma\frac{MN}{KL}$.

Il emploie aussi fréquemment l'expression : la somme des carrés (*omnia quadrata*) de telle figure plane. Il entend par là la somme des carrés des droites de cette figure parallèles à une direction donnée, et cette définition doit s'entendre comme la précédente.

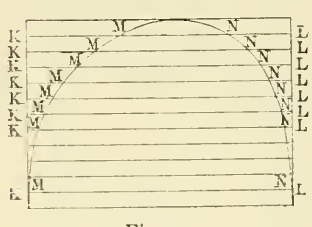


Fig. 21

Nous donnerons de l'important ouvrage de Cavalieri le résumé des propositions les plus intéressantes, en nous servant pour plus de commodité des notations actuellement employées.

GÉOM. INDIV. — LIB. II

III. — *Deux figures planes (ou solides) sont entre elles comme les sommes de leurs droites (ou de leurs plans).* Conséquence de la définition des indivisibles.

(H.) IV. — *Soient deux figures planes (ou solides) comprises entre deux droites (ou deux plans) parallèles. Si une droite (ou plan) quelconque parallèle aux premières détermine dans les deux figures des lignes (ou des plans) qui soient toujours dans le même rapport, il en est de même des surfaces (ou volumes) des deux figures considérées.* Id. Applications à l'ellipse et au sphéroïde.

Ce théorème important, extension de celui de Kepler (G), se démontre rigoureusement à l'aide du théorème d'Archimède (F).

V, VI. — *Les parallélogrammes sont en raison composee de celles (sont comme les produits) des bases et des hauteurs.* Soient les deux parallélogrammes : AE, FH (*fig.* 22). On a

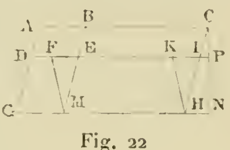


Fig. 22

$$\frac{AE}{DM} = \frac{CP}{PN}, \quad \frac{DM}{FH} = \frac{GM}{MH},$$

d'où, en multipliant

$$\frac{AE}{FH} = \frac{CP}{PN}\,\frac{DE}{MH}.$$

XV. — *Les figures planes semblables sont comme les carrés des lignes homologues.* Conséquence de III. En effet, les droites parallèles à une même direction dans les deux figures sont comme deux dimensions homologues; or, ces droites étant équidistantes dans les deux figures, leurs nombres sont dans le rapport des dimensions perpendiculaires à la direction considérée.

XVII. — *Les solides semblables sont comme les cubes des lignes homologues.* Id. Même démonstration.

XIX. — *La diagonale* CF (*fig.* 23) *d'un parallélogramme le divise en deux triangles égaux.* Prenons HF = MC et menons des parallèles à CD; on a HE = MB, donc toutes les lignes des deux triangles sont égales, et on peut écrire

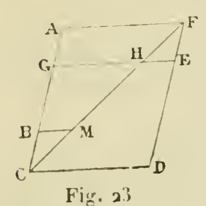


Fig. 23

$$\frac{\Sigma.HE}{\Sigma.GE} = \frac{1}{2}.$$

XXIV. — *Menons la diagonale* EC *du parallélogramme* AEGC (*fig.* 24) : *la somme des carrés des droites du parallélogramme est triple de celle des carrés des droites du triangle* CEG. Menons les médianes BF, DH, et soit RV une transversale parallèle à EG. On a

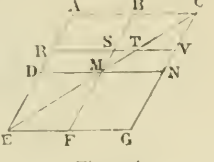


Fig. 24

$$RT^2 + TV^2 = 2.RS^2 + 2.ST^2,$$

donc la somme des carrés des droites de AEC, augmentée de celle

des carrés des droites de CEG, est égale à la somme du double des carrés des droites du parallélogramme EB, du double des carrés de celles de BMC, et du double des carrés de celles de MFE. Par suite, en divisant par 2, on aura

$$\Sigma(\text{carrés des dr. de CEG}) =$$
$$\Sigma(\text{carrés des dr. de EB}) + \Sigma(\text{carrés des dr. de BMC et de MEF}).$$

Or, on a

$$\frac{\Sigma(RS^2)}{\Sigma(RV^2)} = \frac{\Sigma(RS^2)}{\Sigma(4.RS^2)} = \frac{1}{4},$$

d'un autre côté, les droites ST de l'ensemble des triangles BMC, EMF, étant moitiés de celles TV du triangle CEG, disposées dans un autre ordre, leurs carrés en sont le quart, et on a

$$\frac{2\Sigma(ST^2)}{\Sigma(TV^2)} = \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\Sigma(\text{carrés des dr. de CEG}) =$$
$$\frac{1}{4}(\text{carrés des dr. de AG}) + \frac{1}{4}\Sigma(\text{carrés des dr. de CEG}),$$

d'où

$$\frac{\Sigma.TV^2}{\Sigma.RV^2} = \frac{1}{3}\ (^*).$$

(Voir la note III). Il suit de là que la pyramide est le tiers du prisme circonscrit, puisque les côtés des diverses sections horizon-

---

(*) Gergonne a déterminé par des moyens analogues la position du centre de gravité du triangle. Prenons les milieux M, N, P (*fig.* 25) des côtés; on peut admettre comme axiome que les figures semblables ont leurs centres de gravité semblablement placés. Appelons A la surface de chacun des triangles AMN, MBP, MPN, NPC; δ, la distance de leur centre de gravité à leur base; d, la distance analogue du grand triangle, et h sa hauteur. On a, en prenant les moments par rapport à BC

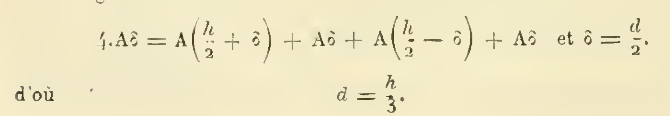


Fig. 25

$$4.A\delta = A\left(\frac{h}{2} + \delta\right) + A\delta + A\left(\frac{h}{2} - \delta\right) + A\delta \quad \text{et} \quad \delta = \frac{d}{2},$$

d'où

$$d = \frac{h}{3}.$$

tales croissant comme celles d'un triangle, les sections croissent ellles-mêmes comme leurs carrés.

On peut aussi en tirer la quadrature de la parabole, etc.

XXX, XXXI. — *Partageons le parallélogramme* AF (*fig.* 26) *en deux parties par la transversale* EC : *la somme des rectangles* HN.NO *des droites du trapèze* DC *et du triangle* CEF, *est à celle des rectangles* HM.MO *comme* DE *à* $\frac{1}{2}$ DE + $\frac{1}{6}$ DF. En effet, on a, d'après XIX et XXIV,

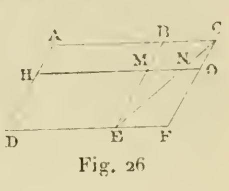


Fig. 26

$$\frac{\Sigma(HN.NO)}{\Sigma(HM.MO)} = \frac{\Sigma(HO.ON)}{\Sigma(DE.EF)} - \frac{\Sigma(ON^2)}{\Sigma(DE.EF)} =$$
$$\frac{DF}{DE}\frac{\Sigma.ON}{\Sigma.EF} - \frac{EF}{DF}\frac{\Sigma(ON^2)}{\Sigma(EF^2)} = \frac{DF}{2.DE} - \frac{EF}{3.DE}.$$

(*A suivre*).

EXERCICES (*)

14. — *Démontrer l'identité suivante à* 6 *variables indépendantes (somme de* 6 *carrés égale identiquement à une somme de* 5 *carrés)* :

$$(a^2+d^2)^2+(b^2+e^2)^2+(c^2+f^2)^2+(ac+ce+ea)^2+(bd+df+fb)^2$$
$$+(ab+bc+cd+de+ef+fa)^2$$
$$=(a^2+d^2+bf+ce)^2+(b^2+e^2+ca+df)^2+(c^2+f^2+db+ea)^2$$
$$+(ab+cd+ef)^2+(af+ed+cb)^2.$$

15. — *Mettre sous la forme d'une somme de* 3 *carrés, les polynomes suivants :*

$2x^4+3x^2y^2+6y^4$ (2 solutions),
$2x^4+x^2y^2+2y^4$ (3 solutions),
$2x^4+6x^2y^2+3y^4$ (3 solutions),
$2x^4+5x^2y^2+2y^4$ (4 solutions).

(*) Par M. Jan Cyane (14 à 17) ; par M. Droz-Farny (18 à 21).

16. — *Démontrer que le polynome* $2x^4 + 6x^2y^2 + 2y^4$ *est :* 1° *la somme de* 2 *carrés ;* 2° *la somme de* 4 *carrés* (6 *solutions*).

17. — *Mettre le carré d'une somme de* 4 *carrés sous la forme d'une somme de* 5 *carrés* (3 *solutions*).

18. — *Deux cercles* O *et* O′ *sont tangents extérieurement en* A. *Soit* BB′ *une tangente commune ; une sécante variable passant par* A *coupe la circonférence* O *en* C *et la circonférence* O′ *en* C′ ; BC *et* B′C′ *se coupent en* P. *On demande le lieu du point de Lemoine du triangle* CPC′.

19. — *Construire, des trois sommets d'un triangle rectangle, comme centres, trois circonférences qui se coupent deux à deux orlhogonalement.*

20. — *D'un point* P *d'une ellipse on mène le diamètre* PA *et une corde* PB. *Soit* C *le pôle de* AB, *démontrer que* CO *est parallèle à* PB.

21. — *Soit une circonférence variable de centre* O *tangente en* P *à une ellipse donnée et qui coupe cette dernière suivant le diamètre* AOB. *Lorsque le point* P *se meut sur l'ellipse, quelle est l'enveloppe de* AB *et quel est le lieu du centre* O ?

BACCALAURÉAT

(*LETTRES-MATHÉMATIQUES*)

(Juillet 1896)

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

(**A**) On donne un tétraèdre SABC dont l'arête SA est perpendiculaire au plan ABC.

En égalant les valeurs du carré de BC tirées de chacun des deux triangles ABC et SBC, on obtient une relation que l'on demande d'abord de former.

Ensuite, en introduisant l'arête SA et les angles BSA et CSA, on peut transformer cette relation en une autre où n'entrent plus que des lignes trigonométriques. On demande de faire ce calcul.

On donne enfin AS et AB, et l'on demande de calculer AC de manière que les deux angles BAC et BSC soient égaux tous les deux à un même angle donné.

(**B**) On considère tous les triangles inscrits dans un cercle de rayon R, ayant pour base une même corde AB = R.

On demande le maximum et le minimum de la médiane issue du point A. On demande aussi quelles sont les surfaces des triangles pour lesquels cette médiane est maximum ou minimum.

(C) On considère tous les quadrilatères ABCD (A, C sommets opposés ; $AB = AD = a$; $cB = cD = 2a$).

1° Dans chacun d'eux on peut inscrire un cercle de rayon R ;

2° Connaissant $AC = b$, trouver BD ;

3° Aire de ABCD, connaissant R : calculer AC ; et déduire le maximum de R.

On donne deux cercles intérieurs l'un à l'autre dont les rayons sont R et r. Le cercle de rayon r passe par le centre A du cercle de rayon R.

Au point A on mène la tangente BC au cercle de rayon r, et par les points B et C, où cette tangente coupe le cercle de rayon R, on mène des tangentes BE et CE au cercle de rayon r. Ces tangentes se coupent en un point E.

1° Calculer, en fonction de R et r, la tangente trigonométrique de l'angle BCE ;

2° Calculer, en fonction de R et r, la distance AE du point E au centre A du cercle de rayon R ;

3° R étant donné, déterminer r de manière que le point E soit sur le cercle de rayon R ;

4° Au point H diamétralement opposé au point A sur le cercle de rayon r, on mène la tangente MM à ce petit cercle. Cette tangente coupe la grande circonférence aux points M et N. Par ces points M et N, on mène à la petite circonférence des tangentes MP et NP qui se coupent en un point P. Démontrer que ce point P est sur la grande circonférence si r a été déterminé en fonction de R de manière que le point E indiqué plus haut soit sur la grande circonférence.

BIBLIOGRAPHIE

Henri de Sarrauton. — L'heure décimale et la division de la circonférence. Brochure de 64 pages. Librairie E. Bernard et Cie. Paris, 53 ter, quai des Grands-Augustins.

La réforme proposée par M. de Sarrauton est certainement la plus pratique de toutes celles qui ont été proposées dans ces derniers temps concernant la façon de compter les heures et la division de la circonférence.

Toutes les qualités de cette réforme sont fort bien exposées dans la note de M. Adolphe Carnot, jointe au mémoire, lequel a d'ailleurs reçu l'approbation de la Société géographique d'Oran, dont le président est le Lieutenant-Colonel Derrien, bien connu par ses travaux de géographie.

Contentons-nous de dire ici que M. de Sarrauton propose de compter les heures de 0 à 24 sans interruption de midi à midi, à partir d'un méridien universel qui toucherait le cap Vert. La circonférence serait divisée en 240 degrés, avec minutes et secondes centésimales. Les heures, tout comme les degrés, seraient divisées en minutes et secondes centésimales, ce qui faciliterait beaucoup les calculs des astronomes, des navigateurs et des géodésiens.

Tout en appréciant au point de vue scientifique les idées de M. de Sar-

rauton, il est cependant à craindre qu'il en soit de cette réforme comme de beaucoup d'autres. L'habitude et la routine triompheront une fois de plus de la logique et du bon sens.

C'est ainsi que la division de la circonférence en 360 degrés, qui est toujours adoptée par les marins et les astronomes, ne l'est pas par les géodésiens, qui, depuis Laplace, emploient la division en 400 grades.

La nouvelle division de M. Sarrauton nécessitant le changement des horloges, la réfection des instruments d'astronomie et de géodésie, ainsi que l'impression de nouvelle tables de logarithmes, il est certain que cette réforme ne saurait être que progressive (*).

Mais il est à souhaiter que, dès à présent, cette réforme soit mise en pratique dans les écoles et dans les grands services publics. E. B.

CHOIX D'ÉPURES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET DE GÉOMÉTRIE COTÉE, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, à l'École navale et à l'Institut agronomique, et des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires, par L. BÉCOURT, professeur aux Lycées Condorcet et Carnot.

(1 volume cartonné in-4°, de 28 planches ; Hachette : Prix, 6 francs).

Le recueil d'épures que M. Bécourt publie aujourd'hui à la librairie Hachette nous semble venir à son heure. Les examens des Écoles spéciales comportent tous une épreuve de géométrie descriptive, et cette partie de l'examen écrit est, particulièrement, redoutée des candidats, qui ne savent comment la traiter pour avoir une note convenable, de laquelle peut, quelquefois, dépendre l'admissibilité.

Il manquait donc aux élèves se présentant à Saint-Cyr, à l'École Navale ou à l'institut agronomique, un guide leur apprenant à faire l'épure exigée à l'examen. L'ouvrage de M. Bécourt vient combler cette lacune. Le professeur qui a écrit ce livre est, depuis longtemps, chargé d'apprendre aux candidats dont nous venons de parler, comment ils doivent traiter cette épreuve ; il est pleinement qualifié pour donner des conseils à cette catégorie d'élèves, et les explications des épures d'examen données dans son livre constituent assurément le meilleur des conseils que l'on puisse donner aux candidats.

Mais, en outre des 27 épures expliquées et construites dans le recueil complet nous devons signaler les conseils pratiques pour la solution graphique d'un certain nombre de problèmes qui se présentent constamment dans la construction d'une épure et qu'il est indispensable de parfaitement posséder. Enfin, M. Bécourt a pris la peine de terminer son recueil par une collection d'exercices, dont quelques-uns ont été donnés aux examens ; les autres ont été exécutés et contrôlés, avant que l'énoncé n'en fût admis dans l'ouvrage ; ces questions fourniront aux professeurs, et aux élèves studieux, d'excellentes épures pour la préparation aux examens. Avec toutes ces qualités, l'ouvrage de M. Bécourt mérite le succès ; nous le lui souhaitons de grand cœur.

(*) Une Commission s'occupe, en ce moment, de cette intéressante question (voir le n° du *Temps* du 4 mars 1897). La numération des heures de 0 à 24, d'après l'article cité, aurait été adoptée par cette commission. G. L.

Nous signalons aussi à l'attention de nos lecteurs les LEÇONS DE MÉCANIQUE à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, par M. X. ANTOMARI, ancien élève de l'École Normale, Agrégé des Sciences Mathématiques, Docteur ès-sciences, professeur en Mathématiques spéciales au Lycée Carnot (Paris, Librairie Nony).

Cet ouvrage, comme tous ceux que M. Antomari a écrits, se recommande particulièrement par l'ordre parfait qui est donné aux matières exposées, la rigueur des démonstrations, et la très grande clarté qui les accompagne. G. L.

QUESTION 696

Solution, par M. A. BOUTIN.

Trouver toutes les solutions entières des deux équations indeterminées :

$$x^2 + 2y = u^2,$$
$$x^2 - 2y = v^2,$$

dans lesquelles x, y, u, v, *sont des inconnues.*

(E. Lemoine).

Par addition, on a

$$2x^2 = u^2 + v^2.$$

Dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires*, année 1895, p. 12, Exercices divers, n° 356, cette équation est complètement résolue par l'identité :

$$(2a^2 - b^2)^2 + (2a^2 + b^2 - 4ab)^2 = 2(2a^2 - 2ab + b^2)^2,$$

qui détermine u, v, x, en fonction des indéterminées nouvelles a, b.

On en déduit :

$$y = 2ab(2a - b)(a - b).$$

Nota. — M. Plackowo résout la question en partant de l'identité

$$2(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2 + 2pq)^2 + (p^2 - q^2 - 2pq)^2.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

798. — Les cercles C et C′ se coupent au point A où leurs tangentes sont t et t', et au point B. Une droite quelconque menée par A coupe C et en C′ en M ou M′. Les projections orthogonales de M sur t' et de M′ sur t sont sur un même cercle avec les points A et B. (*M. d'Ocagne*).

799. — On donne deux cercles C, C' qui se coupent en o. Par ce point, on mène une transversale arbitraire qui rencontre C en a et C' en a'. Du point a, on mène la droite at parallèlement au rayon de C' qui passe par a' : démontrer que, lorsque la transversale tourne autour de o, la droite at reste tangente à une circonférence de cercle. (*Mannheim*).

800. — On donne une série de cercles qui se touchent en a et une autre série de cercles qui se touchent en b. Démontrer que le lieu des points de contact de ces cercles est formé de deux circonférences de cercles qui se rencontrent à angles droits en a et b.

(*Mannheim*).

801. — Trouver l'aire de l'ennéagone ayant pour sommets les neuf points remarquables du cercle d'Euler. $(A > B > C)$ (*).

(*Scholarships, Queen's College, Cambridge*, 1896).

802. — $(n - 1)! \sum_{2}^{n} \frac{1}{n-1}$ est divisible par n (impair).

(*Scholarships, St. John's College, Cambridge*, 1895).

803. — Du sommet b d'un triangle donné abc, on mène des parallèles aux hauteurs de ces triangles, issues de a et de c.

Ces parallèles et ces hauteurs forment un parallélogramme. Démontrer que la médiane du triangle abc, qui est issue de b, est perpendiculaire à la diagonale de ce parallélogramme, qui ne contient pas b. (*Mannheim*).

(*) Cette question et la suivante nous ont été communiquées obligeamment par M. W. J. GREENSTREET. M. A.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 73)

49. — *Le rayon d'un cercle bitangent est, avec la distance du centre de ce cercle à un foyer de la conique, dans le rapport inverse de l'excentricité.*

Soient O (*fig.* 28) le centre de la conique, F, F′ les deux foyers, H le centre du cercle, S le saillant, KL la demi-corde des contacts. La circonférence circonscrite au triangle rectangle HLS passe en F [**44**]. Dans cette circonférence, les carrés des deux cordes HL, HF sont entre eux comme les projections HK, OH sur le diamètre HS, c'est-à-dire comme a^2 est à c^2 [**45**]. On a donc, en appelant r' le rayon HL,

$$r' = \frac{a}{c}\,\text{HF}.$$

Fig. 28

D'après cela, dans tout cercle bitangent, les diamètres qui passent par les foyers ont leurs extrémités sur les tangentes à la conique menée aux sommet de l'axe focal.

La distance du centre du cercle à un foyer, le rayon de ce cercle, la demi-corde principale du foyer, dans le cas de l'ellipse (la tangente issue du foyer, dans le cas de l'hyperbole) ont des longueurs proportionnelles à c, a, b.

Quand le cercle varie, la corde principale du foyer, dans le cas de l'ellipse, est vue, du centre du cercle, sous un angle constant, et le cercle lui-même, dans le cas de l'hyperbole, est vu du foyer sous un angle constant.

50. — *Dans l'ellipse, la demi-corde des contacts est dans le rapport de* a *à* b *avec la moyenne proportionnelle entre les distances du milieu de la corde aux sommets du petit axe.*

La démonstration est analogue à celle qui a été donnée à propos des cercles bitangents de première espèce [**23**].

Dans l'hyperbole, la demi-corde des contacts est dans le rap-

port de a *à* b *avec la distance, du milieu de la corde au point de l'axe focal situé à la distance* b *du centre de la conique.*

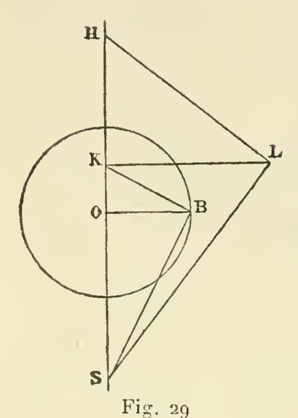


Fig. 29

Soient O (*fig.* 30) ce centre, H celui du cercle, S le saillant, KL la demi-corde des contacts ; sur l'axe focal, prenons OB $= b$.

Puisque KL est symétrique, par rapport à O, de la polaire de S dans le cercle de centre O et de rayon b [45], on a $\overline{OB}^2 = OK.OS$, ce qui prouve que le triangle BKS est rectangle ; le triangle HLS l'est aussi ; ces deux triangles donnent

$$\overline{KL}^2 = HK.KS, \qquad \overline{BK}^2 = OK.KS,$$

d'où

$$\frac{\overline{KL}^2}{\overline{BK}^2} = \frac{HK}{OK} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{et} \quad \frac{KL}{BK} = \frac{a}{b}.$$

51. — On peut s'appuyer sur la propriété du § 46 pour tracer une circonférence passant par un point donné et bitangente de seconde espèce à une conique donnée, à moins que la conique ne soit une ellipse, et que la perpendiculaire abaissée du point donné sur le second axe ne la rencontre pas. Dans ce cas, on fera usage d'une autre propriété, en vue de laquelle nous allons d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme. — *La distance mutuelle de deux points, dont l'un se trouve sur une circonférence donnée, est moyenne proportionnelle entre les distantes de l'autre au centre et au symétrique du conjugué de cet autre par rapport à la circonférence, l'axe de symétrie étant la perpendiculaire abaissée du premier point sur le diamètre passant par le second.*

Soient O (*fig.* 30) le centre du cercle, A, B deux points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'un diamètre CD, M un point quelconque de la circonférence. Menons MP perpendiculaire à CD, et, sur CD, prenons PA′ égal à PA, PB′ égal à PB ; enfin joignons M aux points O, A, A′, B, C.

On a $\widehat{AMO} = \widehat{AMC} + \widehat{CMO}$; mais $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$ parce que MC est bissectrice de l'angle AMB, et $\widehat{CMO} = \widehat{OCM}$ parce que le triangle OCM est isoscèle; il vient donc $\widehat{AMO} = \widehat{BMC} + \widehat{OCM} = \widehat{OBM} = \widehat{AB'M}$. Il suit de là que les triangles AMO, AB'M sont semblables et donnent

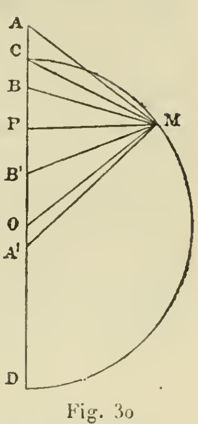


Fig. 30

$$\overline{AM}^2 = AO.AB'.$$

On aurait de même, par les triangles BMO, BA'M,

$$\overline{BM}^2 = BO.BA';$$

BA' est du reste égal à AB'.

On peut remarquer que le rapport de $\overline{AM}^2$ à $\overline{BM}^2$ est le même que celui de AO à BO, et que l'on a aussi AM.BM = OM.AB'.

Si, du centre d'une ellipse, on prend, sur la tangente en l'un des sommets du petit axe, la perspective de la demi-corde polaire d'un point du prolongement de cet axe intérieur à un cercle bitangent, et si l'on mène, dans ce cercle, la demi-corde principale du même point, enfin, si l'on construit un triangle rectangle ayant, pour côtés de l'angle droit, les deux lignes ainsi obtenues, l'hypoténuse de ce triangle sera dans le rapport de c *à* b *avec la distance du point considéré à la droite des contacts.*

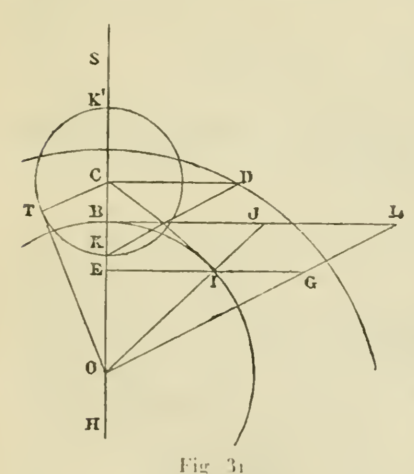


Fig. 31

Soient O (*fig.* 31) le centre de l'ellipse, B l'un des sommets du petit axe, H le centre d'un cercle bitangent, S le saillant, K l'intersection de OB avec la droite des contacts, C l'un quelconque des points situés à l'intérieur du cercle sur le prolongement de OB. Menons la

demi-corde principale CD, et, dans l'ellipse, la demi-corde polaire EG de C. La polaire de C étant la même dans l'ellipse et dans le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre [1], EG passera par le point de contact I de ce cercle avec la tangente issue de C. Elevons en B, sur le second axe, la perpendiculaire BL jusqu'à sa rencontre en L avec OG. Il s'agit de démontrer que le rapport de $\overline{BL}^2 + \overline{CD}^2$ à $\overline{CK}^2$ est celui de c^2 à b^2.

Appelons J le point où OI coupe BL. Les lignes BL, BJ sont proportionnelles aux lignes EG, EI, et celles-ci le sont à a, b [50]. Mais, à cause de l'égalité des triangles OCI, OBJ, on peut, dans la proportion, remplacer BJ par CI; si ensuite on élève au carré, il viendra

$$\frac{\overline{BL}^2}{a^2} = \frac{\overline{CI}^2}{b^2}.$$

Tirons DK, et, sur le second axe, prenons CK′ égal à CK. Puisque S et K sont conjugués par rapport au cercle bitangent, on aura, en vertu du lemme, $\overline{DK}^2 = HK.SK'$, d'où [45]

$$\frac{\overline{DK}^2}{a^2} = \frac{OK.SK'}{b^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\overline{BL}^2 + \overline{DK}^2}{a^2} = \frac{\overline{CI}^2 + OK.SK'}{b^2}.$$

Menons OT tangente au cercle décrit sur KK′ comme diamètre. Le triangle rectangle OIC donne

$$\overline{CI}^2 = \overline{OC}^2 - b^2,$$

ou

$$\overline{CI}^2 = \overline{OC}^2 - OK.OS,$$

puisque K, S sont conjugués par rapport au cercle de centre O et de rayon b [45]. De là résulte

$$\overline{CI}^2 + OK.SK' = \overline{OC}^2 - OK.OK' = \overline{OC}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{CK}^2,$$

et, enfin,

$$\frac{\overline{BL}^2 + \overline{DK}^2}{a^2} = \frac{\overline{CK}^2}{b^2} = \frac{\overline{BL}^2 + \overline{CD}^2}{c^2}.$$

52. — *Les droites des contacts d'une conique avec un cercle bitangent et avec un système de deux tangentes se coupent en l'un des sommets des sécantes communes au cercle et au système des deux tangentes.*

La droite qui joint les deux sommets des sécantes communes est la polaire, par rapport au cercle, du point d'intersection des deux tangentes ; de plus, la droite que joint ce dernier point à l'un des sommets est la polaire de l'autre dans le cercle et dans le système des deux tangentes. Cela posé, on peut adapter, au cas actuel, le raisonnement du § 25.

53. — Ici se placeraient deux autres propriétés dont les énoncés et les démonstrations se déduisent, par analogie, de ce qui a été dit sur les cercles bitangents de première espèce [26], [27].

54. — *Les centres de similitude de deux cercles bitangents se trouvent, avec les foyers, sur une même circonférence.*

Cela résulte de ce que les distances d'un foyer aux centres des deux cercles donnés sont proportionnelles aux rayons.

On voit que le lieu des foyers des coniques bitangentes à deux cercles donnés, de seconde espèce, est la circonférence qui a pour diamètre la ligne joignant les centres de similitude des deux cercles. (*A suivre*).

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

L'Arithmétique binaire a été imaginée, dit-on, par Leibniz ; il est du moins le premier, parmi les Modernes, qui en ait reconnu les propriétés. En réalité, la numération binaire remonte beaucoup plus haut. Sans aller jusqu'à Fo-hi, le fondateur de l'Empire chinois, qui en avait fait usage pour une énigme devenue célèbre, on peut observer que la division des quantités en deux, en quatre, en huit parties égales, est le plus simple, le plus élémentaire de tous les modes de fractionnement, et qu'elle a été longtemps adoptée, qu'elle l'est encore dans certains pays, pour les subdivisions des poids et des autres unités de mesure.

La numération binaire a pour base le nombre deux, et n'em-

ploie que les chiffres 1 et 0. La suite des nombres naturels, représentés dans la numération décimale par les notations

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10..,

se trouve représentée de la manière suivante dans la numération binaire :

1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010...

L'inconvénient du système binaire, outre celui de ne pas correspondre à l'usage de la numération parlée, résulte du grand nombre de chiffres nécessaires pour représenter un nombre, même quand il est médiocrement grand. Nous chercherons d'abord à nous rendre compte approximativement du nombre de chiffres 0 et 1 qui entreront dans l'expression d'un nombre donné N, supposé écrit dans le système décimal.

Ce nombre se trouve, dans la série des puissances de 2, entre deux puissances consécutives, 2^{m-1} et 2^m, lesquelles, dans le système binaire, sont représentées par l'unité suivie de $m - 1$ zéros ou de m zéros. Le nombre N, supérieur à la première limite, inférieur à la seconde, aura donc dans le système binaire m chiffres, comme 2^{m-1}.

Comparons le nombre m au nombre m' de chiffres qu'a l'entier N dans le système décimal. Ce nombre m' est au plus égal au nombre de chiffres décimaux de 2^m, puisque $2^m > N$. Appelons μ ce nombre de chiffres. Pour l'évaluer, cherchons la caractéristique du logarithme tabulaire de 2^m, c'est-à-dire la partie entière du produit

$$m \times 0,3010300.$$

Nous avons

$$\mu = 1 + E(m \times 0,3010300),$$

en désignant par E l'entier contenu dans le produit entre parenthèses. Le nombre de chiffres binaire de 2^m est

$$\mu' = 1 + m.$$

Pour le nombre 2^m, le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ tend, lorsque m augmente, vers la limite 0,3010300, soit, en prenant pour cette limite une valeur un peu trop basse, vers $\frac{3}{10}$. Pour les grands nombres la représen-

tation binaire exigera donc environ les $\frac{10}{3}$ du nombre des chiffres de la représentation décimale. La règle peut être étendue approximativement à tous les nombres.

Prenons pour exemple le nombre 8568, qui se transforme dans l'expression binaire

10000101111000.

Nous avons 14 chiffres binaires contre 4 chiffres décimaux. Les $\frac{10}{3}$ de 4 donneraient $13\frac{1}{3}$; le résultat est approché par défaut. La règle conduira suivant les cas à un résultat trop faible ou trop fort; mais l'erreur sera toujours faible, et le résultat permettra d'apprécier l'espace réclamé par l'écriture binaire des nombres. Prenons les trois puissances successives de 2.

$$2^{14} = 16384 \qquad 2^{15} = 32768 \qquad 2^{16} = 65536.$$

Elles s'expriment toutes par cinq chiffres décimaux. Les $\frac{10}{3}$ de 5 donnent au produit $16\frac{2}{3}$. Or, ces nombres exprimés dans le système binaire demanderont le premier 15 chiffres, le second 16, le troisième 17.

NUMÉRATION BINAIRE

Les chiffres d'un nombre qu'on écrit dans le système dont la base est b, sont les restes successifs obtenus en divisant par b le nombre proposé et les quotients qui s'en déduisent. Lorsque b est égal à 2, les divisions se font intuitivement sans qu'il soit utile de poser le diviseur. Il suffira donc de placer dans une colonne verticale les dividendes successifs, dont chacun sera la moitié du précédent, et de poser en regard de chaque dividende le reste, 0 ou 1, qu'il faut en retrancher pour que la division par 2 se fasse exactement. On s'arrêtera à un diviseur moindre que la base, et qui sera le propre reste de sa division par b. Ce sera ici le nombre 1.

Prenons pour exemples les nombres 360, 15827, 33875.

On disposera les calculs de la manière suivante :

360	0	15827	1	33875	1
180	0	7913	1	16937	1
90	0	3956	0	8468	0
45	1	1978	0	4234	0
22	0	989	1	2117	1
11	1	494	0	1058	0
5	1	247	1	529	1
2	0	123	1	264	0
1	1	61	1	132	0
		30	0	66	0
		15	1	33	1
		7	1	16	0
		3	1	8	0
		1	1	4	0
				2	0
				1	1

On aura donc, en écrivant de gauche à droite les chiffres contenus dans la colonne des restes, prise en remontant,

$$(360)_{10} = (101101000)_2$$
$$(15827)_{10} = (11110111010011)_2$$
$$(33875)_{10} = (1000010001010011)_2.$$

Si les nombres binaires ont beaucoup de chiffres et tiennent beaucoup de place, les chiffres significatifs qu'ils renferment ont la moindre valeur possible, puisqu'ils sont tous égaux à 1.

L'écriture se simplifie notablement, au point de vue des chiffres significatifs, quand on admet les chiffres pris négativement. On a en effet l'identité

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Si donc on trouve dans un nombre binaire un groupe formé de n unités consécutives, on pourra toujours remplacer ce groupe par une unité de l'ordre immédiatement supérieur à l'unité la plus haute qu'il renferme, à prendre négativement l'unité de l'ordre le plus bas, et à écrire des zéros à la place de toutes les unités intermédiaires. On aura par exemple

$$111111 = 100000\bar{1},$$

en plaçant le signe — au-dessus du chiffre pour conserver les positions relatives des unités des différents ordres.

Cette notation une fois adoptée, on en déduit diverses réductions qui simplifient notablement l'écriture des nombres.

On aura, par exemple,

$$(1\bar{1})_2 = 2 - 1 = 1 = (01)_2$$
$$(\bar{1}1)_2 = -2 + 1 = -1 = (0\bar{1})_2$$
$$(\bar{1}\bar{1}11)_2 = (\bar{1}00\bar{1})_2$$
$$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}111)_2 = (\bar{1}0100\bar{1})_2$$
$$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}1111)_2 = (\bar{1}0010000\bar{1})_2.$$

Si nous reprenons les exemples de transformation donnés plus haut, il viendra, en appliquant les réductions indiquées,

$$(360)_{10} = (101101000)_2 = (110\bar{1}01000)_2 = (10\bar{1}0\bar{1}01000)_2$$
$$(15827)_{10} = (11110111010011)_2 = (1000\bar{1}100\bar{1}01110\bar{1})_2$$
$$= (10000\bar{1}00\bar{1}010101\bar{1})_2$$
$$(33875)_{10} = (1000010001010011)_2 = (100001000101010\bar{1})_2.$$

Le résultat final que l'on obtiendra sera un nombre binaire où les chiffres 1, pris positivement ou négativement, seront séparés par un ou plusieurs zéros. L'emploi des unités négatives conduit ainsi à des nombres binaires dans lesquels, sur n chiffres écrits, il y a au plus $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ chiffres significatifs, suivant que n est pair ou impair.

L'opération inverse, qui consiste à revenir d'un nombre binaire donné au nombre décimal égal, se fait aisément à l'aide d'une table des puissances de 2.

2^0	1	2^{10}	1024	2^{20}. . .	1048576
2^1	2	2^{11}	2048	2^{21}. . .	2097152
2^2	4	2^{12}	4096	2^{22}. . .	4194304
2^3	8	2^{13}	8192	2^{23}. . .	8388608
2^4	16	2^{14}	16384	2^{24}. . .	16777216
2^5	32	2^{15}	32768	2^{25}. . .	33554432
2^6	64	2^{16}	65536	2^{26}. . .	67108864
2^7	128	2^{17}	131072	2^{27}. . .	134217728
2^8	256	2^{18}	262144	2^{28}. . .	268435456
2^9	512	2^{19}	524288	2^{29}. . .	536870912
				2^{30}. . .	1073741824

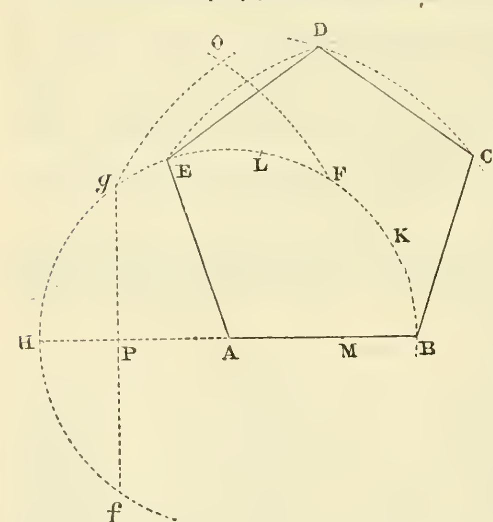
Comme 2^{30} est supérieur à un milliard, un nombre entier de 9 chiffres, écrit dans ce système décimal, pourra donc être représenté, dans le système binaire, avec 30 chiffres au plus. Il est rare qu'on ait à introduire dans les calculs des nombres aussi considérables. (*A suivre*).

NOTES GÉOMÉTRIQUES
SUR LE PENTAGONE ET LE DÉCAGONE RÉGULIERS

Par **A. Droz-Farny**.

Dans un premier article sur le pentagone régulier (*Journal de Mathématiques Élémentaires*, année 1895, page 193), j'ai montré comment on pouvait construire géométriquement, avec la règle et le compas, sur une droite donnée AB, comme côté, un pentagone régulier.

Soit ABCDE le polygone demandé. On sait que les diagonales DA et DB divisent l'angle EDC en trois parties égales de 36° chacune. Donc AB est aussi le côté du décagone régulier dans la circonférence décrite, de D comme centre, avec DA comme rayon. On a donc ainsi un procédé de construction du décagone régulier sur une ligne droite donnée comme côté.



La remarque précédente va nous fournir une seconde solution du problème.

Décrivons de A, comme centre, avec AB comme rayon, une circonférence et portons sur cette dernière les cordes BK = KL = LE = AM; AM étant le grand segment du côté AB divisé en moyenne et extrême raison.

D'après un théorème bien connu, AM sera le côté du décagone inscrit dans cette circonférence et, par conséquent, Arc $BE = 3.36° = 108°$; E est donc un sommet du pentagone cherché.

En se basant sur la construction de la division en moyenne et extrême raison donnée par Mascheroni dans sa Géométrie du compas, il est facile d'obtenir le pentagone régulier en n'utilisant que le compas.

De A comme centre avec AB comme rayon décrivons une circonférence ; sur cette dernière portons à partir de B les cordes égales $BF = Fg = gH = HJ = AB$.

De B et H comme centres avec Bg comme rayon décrivons les arcs gO et FO qui se coupent en O et enfin de g et J comme centres avec AO comme rayon traçons deux arcs de cercle qui se croisent en M sur AB. Il suffira de porter sur la circonférence les cordes $BK = KL = LE = AM$. E sera un sommet du pentagone.

Il est facile de démontrer la construction de Mascheroni. Posons $AB = a$; on a $Bg = HF = a\sqrt{3}$, donc dans le triangle rectangle OAB : $\overline{OA}^2 = (a\sqrt{3})^2 - a^2 = 2a^2$, $OA = a\sqrt{2}$. La corde auxiliaire gJ coupe le rayon AH en P, on a :

$$\overline{PM}^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \qquad PM = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

et, par conséquent

$$AM = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

relation qui prouve l'exactitude de la construction.

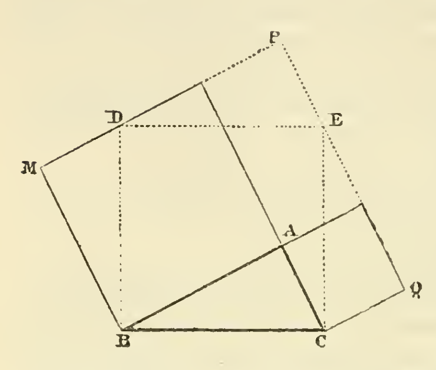
Remarque. — AO est le côté du carré inscrit dans la circonférence.

UNE DÉMONSTRATION
DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Par M. **Wolkow**, professeur à l'École reale de Saint-Pétersbourg.

Prenons la figure classique et aux points B, C, élevons, à BC, des perpendiculaires BD, CE dans la direction opposée à celle que l'on considère habituellement. Nous observerons d'abord que

la figure BCDE est un carré. En effet, le triangle MBD a ses côtés perpendiculaires à ceux de ABC et, comme BM = BA, ces triangles sont égaux; on a donc BD=BC. On voit, de même, que CE = BC.



Cela posé; si, de la figure BMPQCB on retranche les trois triangles égaux BMD, DPE, CQE, il reste le carré construit sur BC.

Si, de cette même figure, on retranche ABC et le rectangle AP, il reste les deux carrés construits sur AB et sur AC. Or, le rectangle AP et le triangle ABC représentent trois triangles égaux à BLD; donc, etc...

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

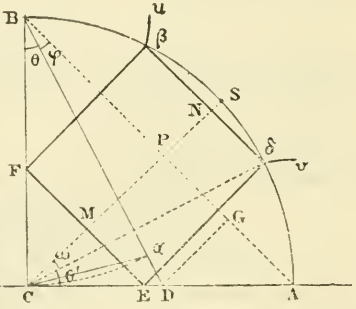
(**2e solution**; voir page 86).

Inscrire dans un quadrant de cercle un carré dont l'un des côtés soit parallèle à la corde de ce quadrant.

On a ME = MC, par suite Nδ est le tiers de NC.

Il suffit donc de partager le segment PA en trois parties égales et de mener la droite, issue de C, qui passe par le point de division le plus rapproché de P : cette droite coupe le cercle donné au point δ, etc...

(M).



SUR L'ÉQUATION $a \sin x + b \cos x = c$,

Par M. **F. J. Vaes** (*)

1. — Prenons (*fig.* 1) (**) $OA = a$, $AB = b$, alors $\frac{b}{a}$ est la tangente de AOB; cet angle est donc l'angle auxiliaire.

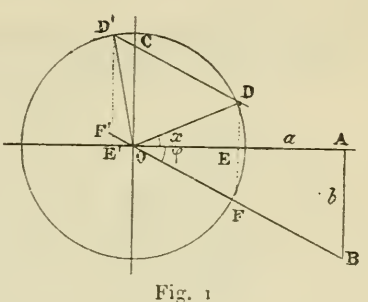


Fig. 1

Décrivons de O comme centre un cercle de rayon R, prenons $OC = R\frac{c}{a}$, et menons par le point C, DD' parallèle à OB. Alors, les angles DOA et D'OA satisfont à l'équation donnée.

En effet, si l'on mène DF parallèle à CO, on a :

$$DE = R \sin DOE,$$

et

$$EF = \frac{AB}{OA}.OE,$$

ou

$$EF = \frac{b}{a}.R \cos DOE.$$

Mais $DF = DE + EF = CO$; donc $R \sin DOE + \frac{b}{a} R \cos DOE = R\frac{c}{a}$, on a

$$\sin DOE + b \cos DOE = c.$$

De même : si D'F' est parallèle à CO, on a $D'E' = R \sin D'OE$, et

$$E'F' = \frac{AB}{OA}.OE' = \frac{b}{a}(- R \cos D'OE).$$

(*) Extrait d'une brochure publiée à Gorinchem (Hollande), en 1896, intitulée *Etude Goniométrique*.

(**) Par un défaut graphique de la (*fig.* 1), le point D n'est pas représenté, avec une exactitude suffisante, comme appartenant au cercle.

Or,

$$D'F' = D'E' - E'F' = CO\,;$$

finalement :

$$R \sin D'OE + \frac{b}{a} R \cos D'OE = \frac{c}{a}$$

ou

$$a \sin D'OE + b \cos D'OE = c.$$

2. — *Comparaison des constructions connues* (*).

Traçons (*fig.* 2) la tangente en A' ; elle coupe DD' en D_1 ; puis menons D_1E parallèle à DO, et D_1F parallèle à D'O, ce qui revient à déplacer le secteur OD'D de façon que O vienne en D_1, et DD' le long de OB, alors on a la solution de M. Droz-Farny. Dans la construction de M. Lauvernay, il suffit de tracer le cercle BD en son entier pour voir qu'elle est tout-à-fait égale à celle de M. Lemoine. La première se termine par le tracé du cercle BD ; l'autre débute par ce tracé. L'autre cercle employé dans ces deux constructions est le cercle circonscrit au triangle OD'D ; la droite D'D cherchée est la corde commune des deux cercles.

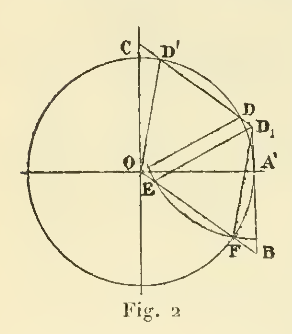


Fig. 2

Les équations des deux cercles sont :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = c^2,$$

$$(2) \qquad \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

l'équation de l'axe radical est donc :

$$(3) \qquad bx + ay = c^2.$$

Les équations (1) et (3) conduisent à la solution de M. de Longchamps (*loc. cit.*).

(*) Voyez *Journal*, 1896, pp. 5, 59, 84.

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 78).

20 (*). — *Des bissectrices limitées* SG$_1$, SG′, QG$_1$ QG′ *et des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

$$SG_1 = \delta - \beta = \frac{2bhl(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)},$$

$$SG' = \delta + \beta = \frac{2dhl(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)},$$

$$QE_1 = \gamma - \alpha = \frac{2chl(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)},$$

$$QE' = \gamma - \alpha = \frac{2ahl(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)}.$$

Droite joignant les milieux de AB et CD

$$\text{coefficient angulaire } \frac{m-n}{m+n}\cot g \frac{I}{2},$$

(*) Le point L, dont il a été question dans les paragraphes précédents, et dont l'importance est manifeste, occupe comme on l'a vu, sur HK, une position déterminée par le rapport des diagonales ; il se trouve encore situé sur quatre droites définies passant par les sommets du quadrilatère. En effet, des formules antérieurement établies (§ **16**), on tire :

$$r' = \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} = \frac{S}{a+c},$$

$$r'' = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} = \frac{S}{d+b}.$$

Par conséquent :

Si l'on prolonge les deux côtés d'un angle du quadrilatère, A par exemple, d'une longueur égale au côté opposé, la diagonale, issue de A, du parallélogramme construit sur les lignes a + c *et* d + b, *ainsi formées, passe par le point* L ; *l'aire du quadrilatère* ABCD *est double de celle des triangles ayant ces lignes pour bases, et le point* L *pour sommet opposé.*

n° 21 direction symétrique de QI, ou $\frac{\beta^2}{\delta\gamma}$,

longueur $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos I}$.

Droite joignant les milieux de AD et BC

coefficient angulaire $\frac{m+n}{m-n} \operatorname{cotg} \frac{I}{2}$,

direction symétrique de SI, ou $\frac{\delta\gamma}{\alpha^2}$,

longueur $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos I}$.

Il serait facile de vérifier avec les coordonnées des milieux des quatre cotés que les deux droites précédentes passent par le milieu de HK, et que SH, SK et QH, QK sont symétriques par rapport à SL et QL, ce qui est du à l'antiparallélisme des côtés opposés du quadrilatère.

On trouvera aussi la relation :

$$\frac{MH}{MK} = \frac{m^2}{n^2}.$$

21. — *Éléments du triangle* SOQ.

Le point I est le point de rencontre des hauteurs, de sorte que les angles SIQ et O sont supplémentaires.

Soit I_1 le pied de la hauteur QII_1,

I_2 le pied de la hauteur SII_2.

Coefficients angulaires des droites

QO $\quad \frac{(a-c)(d-b)}{(a+c)(d+b)}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}} = \frac{\alpha^2}{\delta\gamma}$,

SO $\quad \frac{(a+c)(d+b)}{(a-c)(d-b)}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}} = \frac{\delta\gamma}{\beta^2}$,

SI $\quad -\frac{(a+c)(d+b)}{(a-c)(d-b)}\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}} = -\frac{\delta\gamma}{\alpha^2}$,

QI $\quad -\frac{(a-c)(d-b)}{(a+c)(d+b)}\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}} = -\frac{\beta^2}{\delta\gamma}$,

distances OQ, OS, IQ, IS

$$\mathrm{OQ}=\frac{hl}{4\delta\gamma}\cdot\frac{d+b}{a-c}\sqrt{\frac{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}{(p-a)(p-c)}}=\frac{\delta(\gamma^2+\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

$$\mathrm{OS}=\frac{hl}{4\delta\gamma}\cdot\frac{a+c}{d-b}\sqrt{\frac{\delta^2\gamma^2+\beta^4}{(p-b)(p-d)}}=\frac{\gamma(\delta^2+\alpha^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

$$\mathrm{IQ}=\frac{ac(d+b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl(a-c)}\times\frac{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}}{\delta\gamma}=\frac{\delta(\gamma^2-\alpha^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

$$\mathrm{IS}=\frac{bd(a+c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl(d-b)}\times\frac{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}}{\delta\gamma}=\frac{\gamma(\delta^2-\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

hauteurs QI_1 et SI_2

$$\mathrm{QI}_1=\frac{h^3l^3(d-b)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{\mathrm{S}(a^2-c^2)(d^2-b^2)(a+c)}\times\frac{\delta\gamma}{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}},$$

$$\mathrm{SI}_2=\frac{h^3l^3(a-c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{\mathrm{S}(a^2-c^2)(d^2-b^2)(d+b)}\times\frac{\delta\gamma}{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}},$$

lignes trigonométriques de l'angle $\widehat{\mathrm{SOQ}}=\widehat{\mathrm{O}}$,

$$\mathrm{tg}\,\widehat{\mathrm{O}}=\frac{4\mathrm{S}h^2l^2}{k^2(a^2-c^2)(d^2-b^2)},\qquad \cos\widehat{\mathrm{O}}=\frac{\delta\gamma(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{(\delta^2\gamma^2+\alpha^4)(\delta^2\gamma^2+{}^4\beta)}},$$

$$\sin\widehat{\mathrm{O}}=\frac{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}{\sqrt{(\delta^2\gamma^2+\alpha^4)(\delta^2\gamma^2+\beta^4)}}.$$

22. — *Distances au centre et longueurs de* C_1 *et* C_2 *cordes du cercle* O *interceptées sur* QI_1 *et* SI_2.

$$\mathrm{OI}_1=\frac{\delta^2\gamma(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)}{(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}},\qquad \overline{\mathrm{OI}}^2=\frac{\gamma^2\delta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\delta^2)}{(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}},$$

$$\mathrm{C}_1=\frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\delta^2-\beta^2}}{\sqrt{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}\sqrt{\beta^4+\delta^2\gamma^2}},\qquad \mathrm{C}_2=\frac{2\delta\gamma\sqrt{\beta^2+\alpha^2}\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\sqrt{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}\sqrt{\alpha^4+\delta^2\gamma^2}},$$

Remarque. — La circonférence décrite sur SQ comme diamètre passe par les points S, Q, L, ω, I_1, I_2 et les pieds des hauteurs abaissées des sommets S et Q dans les triangles (b, S), (d, S); (a, Q) et (c, Q). Le rapport des distances de chacun de ces dix points aux milieux H et K des diagonales et égal au rapport $\frac{m}{n}$.

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE
SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 87)

GÉOM. INDIV. — LIB. III

I. — *Soit le segment circulaire ou elliptique* DEM (*fig.* 27); *la somme des carrés des droites* CN *est à celle des carrés des droites* CM *comme* EB + 3.BR *à* 6.BR, *ou bien* OB + ER *à* 6.BR. En effet, d'après la proposition précédemment démontrée

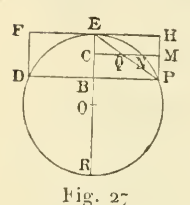


Fig. 27

$$\frac{\Sigma(\overline{CN}^2)}{\Sigma(\overline{CM}^2)} = \frac{\Sigma(RC.CE)}{\Sigma(RB.BE)} = \frac{\frac{EB}{6} + \frac{BR}{2}}{BR}.$$

Corollaire I. — Il suit de là que le segment sphérique (ou elliptique) est au cylindre de même base et de même hauteur dans le rapport qui vient d'être indiqué. Par exemple, si le plan sécant passe par le centre O, ce rapport devient $\frac{ER}{6.OR} = \frac{2}{3}$; la demi sphère (ou le demi sphéroïde) est donc égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Ce théorème n'est pas applicable à la sphère entière : le suivant n'a pas la même limitation.

Corollaire II. — On remarquera que, en menant les cordes DE, EP, on a

$$\frac{\Sigma(\overline{CQ}^2)}{\Sigma(\overline{CM}^2)} = \frac{1}{3},$$

ainsi, la demi sphère (ou le demi sphéroïde) est moyenne arithmétique entre le cône inscrit et le cylindre circonscrit.

II. — *Au segment de cercle ou d'ellipse* BM (*fig.* 28), *circonscrivons un rectangle* DN, *on a*

$$\frac{\Sigma(\overline{IL}^2)}{\Sigma(\overline{JK}^2)} = \frac{3.BA.AO}{BM(MO + OA)}.$$

Fig. 28

Démonstration analogue à la précédente.

De là un nouveau moyen de comparer la sphère (ou le sphéroïde) au cylindre circonscrit.

V. — *Soit* DBF *un demi cercle* (*ou une demi ellipse*) (*fig.* 29). *Circonscrivons-lui le rectangle* AF *et tirons les droites* AE, CE : *pour toute transversale* XG, *on a*

$$\overline{XG}^2 = \overline{ZL}^2 + \overline{YR}^2.$$

Fig. 29

La démonstration est facile.

Corollaire. — Il s'ensuit que la tranche de sphère (ou de sphéroïde) égale la différence des tranches correspondantes du cylindre et du cône. De là une nouvelle cubature partielle ou totale extrêmement simple de ces deux corps (*).

XIII. — *Circonscrivons un rectangle* OV (*fig.* 30) *au quadrant de cercle* (*ou d'ellipse*) OCD, *il s'agit de déterminer le rapport de* $\Sigma(IF^2)$ *à* $\Sigma(EF^2)$. *On a*

$$\overline{IF}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{EI}^2 - 2.EF.IF,$$

Fig. 30

donc

$$\frac{\Sigma(\overline{IF}^2)}{\Sigma(\overline{EF}^2)} = 1 + \frac{\Sigma(\overline{EI}^2)}{\Sigma(\overline{EF}^2)} - 2\,\frac{\Sigma.EI}{\Sigma.EF} = 1 + \frac{2}{3} - 2\,\frac{\text{surf. ODIC}}{\text{rect. OV}}.$$

Corollaire. — Le rapport qu'on vient de trouver est celui des solides produits par la révolution du quadrant et du rectangle autour de DV. Le premier de ces solides s'appelle *apex*.

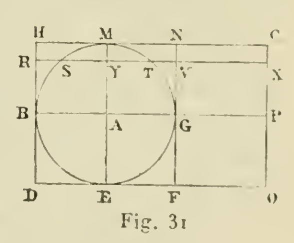


Fig. 31

XIV, XVI, XVII. — *Considérons la figure formée d'un cercle* (*ou d'une*

(*) On tire de là le théorème général suivant :

(I) *Si trois solides de même hauteur sont tels que les sections du premier et du second soient ensemble égales à celle du troisième, le volume de ce dernier est égal à la somme des deux autres.* Ce théorème, conséquence du théorème d'Archimède, s'applique à un nombre quelconque de solides. On l'étend immédiatement aux surfaces.

La méthode de cubature résultant de cette remarque a été retrouvée récemment (voir le *Traité de Géom.* de F. I. C.), ainsi que plusieurs de celles qu'il nous reste à exposer.

ellipse) ME (*fig.* 31) *et du rectangle circonscrit* HF *prolongé en* NO. *Il faut trouver les rapports*

$$\frac{\Sigma(\overline{TX}^2)}{\Sigma(\overline{YX}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{SX}^2)}{\Sigma(\overline{YX}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{SX}^2 - \overline{TX}^2)}{\Sigma(\overline{ST}^2)}.$$

Comme $TX^2 = XY^2 + YT^2 - 2.XY.YT$, le premier rapport est égal à

$$1 + \frac{\overline{AG}^2}{\overline{AD}^2}\frac{\Sigma(\overline{YT}^2)}{\Sigma(\overline{YV}^2)} - 2\frac{\Sigma.YT}{\Sigma.YX} = 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{AG}{AP}\right)^2 - 2\frac{\text{surf. MGE}}{\text{rect. MO}}.$$

On a ainsi la mesure du *tympanum*, produit par la révolution de la figure CMGEO autour de CO.

Le second cas se traite de même et donne la mesure de la *basis columnaris*, produite par la révolution de la figure CMBEO autour de CO.

Le troisième rapport peut s'écrire

$$2.AP\frac{\Sigma.ST}{\Sigma(\overline{ST}^2)} = 2\frac{AP}{BG}\frac{\Sigma.ST}{\Sigma.RV}\frac{\Sigma(\overline{RV}^2)}{\Sigma(\overline{ST}^2)}$$

$$= 2\frac{AP}{BG}\frac{\text{cercle ou ell.}}{\text{rect. HF}}\frac{3}{2} = 3\frac{AP}{BG}\frac{\text{cercle ou ell.}}{\text{rect. HF}}.$$

Ce rapport est aussi celui du volume de l'*annulus* produit par la rotation du cercle (ou ellipse) ME autour de CO à la sphère (ou sphéroïde), produite par le même cercle (ou ellipse), tournant autour de ME.

Quand cette dernière figure, au lieu de tourner autour de CO, tourne autour de NF, on a l'*annulus strictus*.

Cavalieri donne ensuite, par les mêmes moyens, la mesure du solide produit par un segment circulaire (ou elliptique), d'abord autour de sa corde : 1° dans le cas où le segment est plus grand qu'un demi-cercle (ou ellipse), solide appelé *malum roseum* (ou *cotoneum*) ; 2° dans le cas où il est plus petit, ce qui donne un solide appelé *malum citrium* (ou *oliva*) ; ensuite, autour d'une parallèle à sa corde ; puis, par une ellipse tournant autour d'une parallèle quelconque, ou d'une parallèle à cette tangente. Il termine en indiquant plusieurs autres sujets de recherches : solides produits par une ellipse tournant autour d'un diamètre (*pirum*), ou autour d'une parallèle à ce diamètre (*malum paradisum* ou *ficus*, suivant les cas).

GÉOM. INDIV. — LIB. IV, V ET VI

Nous citerons du quatrième livre :

I. — *Le segment de parabole est égal aux deux tiers du parallélogramme circonscrit.* En effet, on a (*fig.* 32)

$$\frac{NM}{NO} = \frac{\overline{QB}^2}{\overline{GH}^2} = \frac{\overline{NP}^2}{\overline{EH}^2},$$

donc
$$\frac{\Sigma.NM}{\Sigma.NO} = \frac{\Sigma(\overline{NP}^2)}{\Sigma(\overline{EH}^2)} = \frac{1}{3}.$$

Fig. 32

XXI. — *Le conoïde parabolique est égal à la moitié du cylindre circonscrit.* En effet

$$\frac{\overline{IM}^2}{\overline{IL}^2} = \frac{XY}{EH} = \frac{IX}{GH},$$

donc

$$\frac{\Sigma(\overline{IM}^2)}{\Sigma(\overline{IL}^2)} = \frac{\Sigma.IX}{\Sigma.GH} = \frac{1}{2}.$$

Nous avons présenté les deux démonstrations avec la simplicité qu'elles comportent : elles sont obtenues chez lui par des détours pénibles et embarrassés. Le reste du livre IV concerne les solides produits par la révolution d'un segment parabolique autour d'un diamètre, comme ST (*fig.* 33), c'est-à-dire la recherche des valeurs des rapports suivants, ST étant en dehors du segment, ou en dedans, ou le coupant en U :

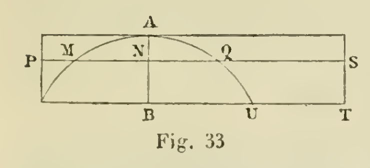


Fig. 33

$$\frac{\Sigma(\overline{MS}^2)}{\Sigma(\overline{PS}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{QS}^2)}{\Sigma(\overline{NS}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{MS}^2 - \overline{MQ}^2)}{\Sigma(\overline{NS}^2)}.$$

Ces solides sont l'*apex parabolicus*, l'*acervus*, le *semiannulus*, etc.

Dans le cinquième livre, il donne d'abord des théorèmes analogues à ceux du précédent, mais concernant l'hyperbole, et dont on restituera sans peine les énoncés et les démonstrations. Nous ne retiendrons que le suivant, à cause de sa simplicité.

XXV. — *Mesure du tympanum hyperbolicum produit par un segment d'hyperbole* MAN, *tournant autour de l'axe non transverse.* On a (*fig.* 34)

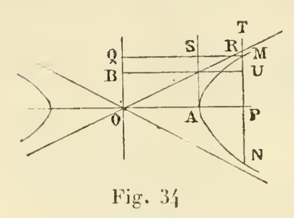


Fig. 34

$$\overline{MQ}^2 = \overline{RQ}^2 + \overline{SQ}^2.$$

Le volume est donc égal à la somme d'un cylindre et d'un cône aisément déterminables (*).

Dans le sixième livre, Cavalieri ramène ainsi la quadrature de la spirale d'Archimède à celle de la parabole.

Soit la parabole OMA (*fig.* 36), telle que la tangente OB soit égale au rayon, et l'ordonnée AB à la circonférence génératrice de la spirale. A l'ordonnée MP, correspond un secteur élémentaire de la spirale, qui aura un rayon égal à OP. On a donc

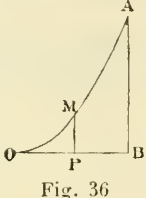


Fig. 36

$$\frac{\text{surf. spirale}}{\text{surf. parab.}} = \frac{\Sigma(\text{sect. OP})}{\Sigma(\text{ord. MP})} = \frac{\Sigma(\overline{OP}^2)}{\Sigma.\text{MP}} = 1,$$

(*) Il est surprenant que cette extension du théorème V du livre III n'ait pas été suivie de celle relative au conoïde hyperbolique d'Archimède (à deux nappes). On a en effet

$$\overline{MP}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{UP}^2,$$

ce qui montre que ce conoïde est de même égal à un cône et un cylindre. Cavalieri trouve péniblement les sommes des carrés des ordonnées de l'hyperbole par sa méthode habituelle.

En général, soient deux droites OA, OB (*fig.* 35) coupées en K et L par une perpendiculaire à AB. Si on prend

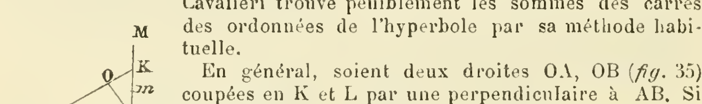


Fig. 35

$$\overline{PM}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{PL}^2 \quad \text{et} \quad \overline{Pm}^2 = \overline{PL}^2 - \overline{PK}^2,$$

les lieux de M et de m sont deux coniques telles que, tournant autour de AB, les cercles décrits par PM et Pm seront respectivement la somme et la différence de ceux décrits par PL et PK. Le volume est donc la somme ou la différence de deux cônes.

Dans le cas où les deux droites OA, OB sont également inclinées sur AB, le lieu de m est un conoïde parabolique. De là un nouveau moyen de le mesurer.

puisque $MP = \overline{OP}^2$. La surface retranchée dans le cercle est donc égale au segment parabolique OAB (*).

(*A suivre*).

BACCALAURÉAT CLASSIQUE ET MODERNE

(*LETTRES-MATHÉMATIQUES*; 3 Avril 1897).

Académie de Paris

1° *Problème obligatoire :* On considère la somme S_1 des n premiers nombres entiers, et la somme S_2 de leurs carrés. On demande comment varie le rapport de S_2 au carré de S_1, quand n croît, par valeurs entières, à partir de l'unité.

2° *Questions à choisir :* (a) Connaissant $\sin a$ calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$.

(b) Résoudre un triangle connaissant ses trois côtés.

(c) Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

ENSEIGNEMENT MODERNE

(*LETTRES-SCIENCES*)

Problème : Une droite F'F de longueur $2c$ étant donnée, on décrit une circonférence sur cette droite comme diamètre et on considère les deux points F' et F comme les foyers d'une ellipse qui coupe la circonférence précédente On propose :

1° D'établir l'équation qui permet de calculer ou de construire le demi-grand axe a de cette ellipse, en supposant que le rectangle ABCD, inscrit à la fois dans le cercle et dans l'ellipse, ait une surface donnée K^2.

(*) G. de Saint-Vincent et Cavalieri ont étudié les nombreuses analogies de la spirale d'Archimède et de la parabole, en représentant la première comme une parabole enroulée autour de son sommet O suivant cette loi : si M est un point quelconque de la spirale, on décrira du centre O l'arc circulaire MP coupant l'axe polaire en P, et on prendra perpendiculairement à ce même axe la longueur $P\mu =$ arc MP : le lieu de μ est une parabole.

Il était aisé de tirer de là la correspondance des constructions de la tangente aux deux courbes, l'égalité du secteur compris entre les rayons vecteurs de deux points de la spirale, et de la surface comprise entre les ordonnées des points correspondants dans la parabole.

Il y avait même lieu de croire que les arcs correspondants sont de même égaux. Cette propriété, énoncée d'abord par Roberval, vers 1644, a été démontrée par Pascal en 1658 par la méthode des Anciens. Wallis en a donné une démonstration plus simple, qui revient à celle que nous avons fait connaître, J. S. 1893, p. 145.

2° De faire connaître les conditions de possibilité du problème et, pour la limite supérieure de K^2 ainsi trouvée, d'exprimer la valeur de a.

3° De calculer le rapport de la valeur limite K^2, à l'aire de l'ellipse correspondante.

Questions à choisir : (*a*) Définition complète des six lignes trigonométriques; former le tableau de leurs variations quand l'arc croît de 0 à 2π. Courbes représentatives.

(*b*) Énoncer et démontrer le théorème des projections.

(*c*) Établir les formules des lignes trigonométriques relatives à l'addition des arcs.

EXERCICES

22. — *Trois cercles égaux passent par un point* O. *Démontrer que le segment de droite qui réunit les points d'intersection de deux de ces cercles, supposés fixes, avec le troisième, est de grandeur constante et a toujours la même direction, quelle que soit la position de ce dernier cercle autour de* O. (M).

23. — *On donne un cercle et deux cordes quelconques.*

Par les extrémités de chacune d'elles, on leur élève respectivement des perpendiculaires : démontrer que le point de rencontre des diagonales du parallélogramme, ainsi obtenu, est au centre du cercle donné. (M).

24. — *On donne un triangle* abc *et la parallèle menée de* b *à* ac. *Du milieu* m *de* ac, *on mène une droite arbitraire qui coupe cette droite en* l *et* bc *au point* p. *Démontrer que la droite, qui joint le point* l *au milieu de* ab, *partage en deux parties égales le segment* bp? (M).

25. — *Par le point* c, *commun à deux cercles de centres* o *et* o′, *on fait passer une droite, qui coupe en* a *le cercle de centre* o *et en* b′ *l'autre cercle. On prend le point* m *où se coupent les droites* ao, bo′ : *on demande le lieu de ce point, lorsque* ab *tourne autour de* c. (M).

26. — *Dans une circonférence de cercle, on mène les cordes* ab, bc, cd, *puis* de *parallèle à* ab *et* ef *parallèle à* bc. *Démontrer que* fa *est parallèle à* cd. (M).

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 97)

CERCLES BITANGENTS A CONTACTS IMAGINAIRES

55. — Tout point du second axe de l'hyperbole est le centre d'un cercle bitangent. Il n'en est pas de même dans l'ellipse ; les valeurs

$$h' = \frac{c^2}{b},\ \mathrm{K}' = s' = b,\ \delta' = r' = \frac{a^2}{b}$$

correspondent au cercle osculateur de cette courbe en l'un des sommets du petit axe, mais, si, partant d'un point plus éloigné du centre de la conique que le centre de ce cercle, on effectue les constructions résultant des §§ **44** et **45**, on trouvera un saillant qui serait intérieur à l'ellipse, et une droite des contacts qui lui serait extérieure. Le point considéré ne sera donc le centre d'aucun cercle bitangent.

De ce point, abaissons, sur une tangente à la courbe, une perpendiculaire, dont nous prendrons les intersections avec les deux droites lieux des nœuds, par rapport à la tangente, des cercles bitangents à contacts réels ; ensuite, du même point comme centre, décrivons un cercle ayant pour nœuds, par rapport à la même tangente, les intersections ainsi obtenues ; ce sera l'un des cercles qui seronts dits *bitangents à contacts imaginaires*. Nous appellerons *droite des contacts* la parallèle à l'axe focal menée par le point de rencontre de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la tangente avec la droite qui joint le point de contact de cette tangente au centre de l'ellipse.

56. — En réalité, le cercle et la droite sont indépendants de la tangente à l'aide de laquelle ils ont été provisoirement définis.

Démontrons d'abord que le rayon du cercle, comme celui d'un cercle à contacts réels, est, avec la distance de son centre au foyer, dans le rapport de a à c.

Soient O (*fig.* 32) le centre de l'ellipse, F l'un des foyers, MT la

tangente en un point quelconque M de la courbe, H le centre d'un cercle bitangent à contacts imaginaires, HD la perpendiculaire abaissée de H sur MP, ω l'intersection de HD avec l'un des lieux de nœuds de MT par rapport aux cercles à contacts réels. Si, sur MT, nous prenons DC égal à Dω, C sera, d'après la définition, un point de la circonférence du cercle bitangent à contacts imaginaires, et ce cercle aura pour rayon CH. Il faut prouver que le rapport de CH à FH est celui de a à c.

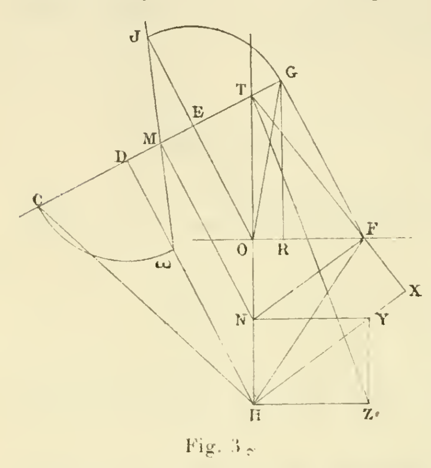


Fig. 3.

Menons OE et FG perpendiculaires à MT ; G appartiendra à la circonférence du cercle principal, et si, sur OE, nous prenons EJ égal à la demi-corde EG, J sera l'un des nœuds de ce cercle par rapport à MT, de sorte que les trois points J, M, ω se trouveront en ligne droite [42]. Menons aussi la normale MN jusqu'à sa rencontre avec l'axe HT. A cause de la similitude des triangles DMω, EJM, les lignes Dω, EJ sont proportionnelles aux lignes DM, EM ; celles-ci le sont à HN, ON, parce que DH, MN, OE sont parallèles ; on a donc Dω. ON = EJ. HN.

Le quadrilatère OFGT étant inscriptible, les angles OGE, OFT sont égaux, et les triangles rectangles de mêmes noms donnent EG. FT = OF. OG.

Enfin, soient Y le point d'intersection de HX, perpendiculaire à FT, avec NY, parallèle à OF, et Z le quatrième sommet du rectangle HNYZ. Les triangles HNY, OFT étant semblables, on aura HN. OT = OF. NY.

Si l'on multiplie membre à membre les trois égalités précédentes, en observant que Dω est égal à CD, EJ à EG, NY à HZ, et $\overline{OF}^2$ à ON. OT, il viendra CD. FT = OG. HZ.

Menons GR perpendiculaire à OF. Le quadrilatère OFGT étant inscriptible, ainsi qu'il a déjà été dit, $\widehat{TFG}$ est égal à $\widehat{TOG}$, par

conséquent à $\widehat{OGR}$, et les triangles FGT, OGR sont semblables. Les triangles FGR, DHT le sont aussi. De cette remarque et de la relation du précédent alinéa, résulte

$$\frac{CD}{HZ}=\frac{OG}{FT}=\frac{GR}{FG}=\frac{DH}{HT}.$$

L'égalité du premier rapport au dernier montre que les deux triangles rectangles CDH, HTZ ont l'angle droit compris entre côtés proportionnels; donc le rapport de leurs hypoténuses est égal à chacun des rapports extrêmes, et aussi au second, de sorte que l'on a

$$CH.FT = OG.TZ.$$

De ce que les lignes XF, HX sont parallèles [**44**], puis, de ce que les triangles HTX, HXY sont semblables, on conclut que les produits HT. FX, HX. XY ou HX. HZ sont tous deux égaux à HX. TX, par conséquent égaux entre eux. Il en résulte que HX, FX sont proportionnels à HT, HZ, et que les triangles rectangles HTZ, FHX sont semblables, ce qui donne

$$HX.\ TZ = FH.\ HT.$$

Enfin, on a, par les triangles HTX, OFT,

$$OF.\ HT = HX.\ FT.$$

Pour obtenir la relation que l'on voulait démontrer, il n'y a plus qu'à multiplier membre à membre les trois égalités de produit mises à la ligne dans le présent paragraphe, en y remplaçant OF par c, et OG par a.

57. — Nous allons maintenant faire voir que la droite des contacts, telle qu'elle a été définie au § **55**, peut s'obtenir par les mêmes constructions que dans le cas des contacts réels.

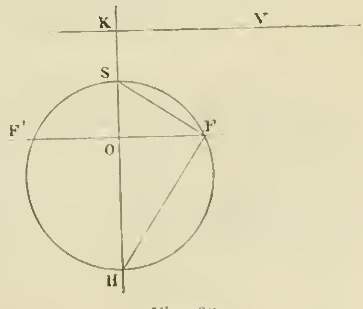


Fig. 33

Soient KV (*fig.* 33) cette droite, O, F, F′ le centre et les foyers de l'ellipse, H le centre du cercle, S le second point d'intersection de l'axe OH avec la

circonférence FHF'. On aura OH.OS $= c^2$. D'ailleurs, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait sur les cercles bitangents de première espèce à contacts imaginaires [33], on peut démontrer que OH, OK, HK sont proportionnels à c^2, b^2, a^2 ; il vient donc

$$\frac{c^2}{\mathrm{OH}} = \frac{b^2}{\mathrm{OK}} = \frac{a^2}{\mathrm{HK}} = \mathrm{OS}.$$

De là il suit que la droite KV est la polaire de S dans le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre et dans l'ellipse. Elle l'est aussi dans le cercle bitangent, car de :

$$\mathrm{HS} = \frac{\overline{\mathrm{HF}}^2}{\mathrm{OH}}, \quad \mathrm{HK} = \frac{a^2}{c^2}\,\mathrm{OH},$$

on conclut

$$\mathrm{HS}.\,\mathrm{HK} = \frac{a^2}{c^2}\,\overline{\mathrm{HF}}^2 = r^2,$$

r désignant le rayon du cercle.

Il reste a démontrer que tout point de KV à la même polaire dans ce cercle et dans l'ellipse. Le raisonnement serait le même que celui qui a été employé lorsqu'il s'agissait des cercles de première espèce [35].

Nous renverrons au § 36 par une propriété analogue à celle qui y a été établie, et au § 38 pour les énoncés de problèmes.

(*A suivre*).

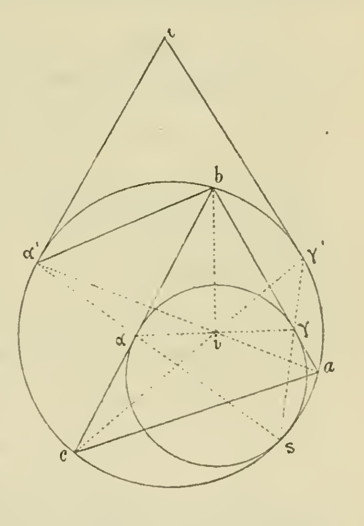
NOUVELLES DÉMONSTRATIONS (*)
D'UN THÉORÈME DE M. MANNHEIM

Le cercle inscrit dans l'angle abc, *et qui est tangent intérieurement en* s *au cercle circonscrit au triangle* abc, *touche les côtés* cb, ba *aux points* α, γ : *le milieu* i *du segment* $\alpha\gamma$ *est le centre du cercle inscrit au triangle* abc. Le point s est un centre de similitude des deux cercles qui se touchent en ce point. La droite $s\alpha$ rencontre le cercle abc au point α' homologue de α. La tangente en α' au cercle abc est alors parallèle à ab, par suite le

(*) Communiquées par M. Mannheim.

point α' est le milieu de l'arc $b\alpha'c$; de même γ' est le milieu de l'arc $a\gamma'b$, Les droites $a\alpha'$, $c\gamma'$ se coupent alors au point i centre du cercle inscrit au triangle abc. La figure $abc\gamma's\alpha'a$ étant un hexagone inscrit dans le cercle abc, les points de rencontre α, i, γ des côtés de cet hexagone sont en ligne droite. Ainsi i est sur $\alpha\gamma$, et comme ce centre i est aussi sur la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isoscèle $\alpha b\gamma$, *ce point est le milieu de la base* $\alpha\gamma$ de ce triangle.

Autrement. — Supposons démontré, comme précédemment, que α' et γ' sont les milieux des arcs sous-tendus par bc, ba. Le point de rencontre t des tangentes $\alpha't$, $\gamma't$ étant l'homologue de b, il est situé sur la droite sb. Les droites $\alpha't$, $\alpha'b$, $\alpha'\gamma'$, $\alpha's$ forment un faisceau harmonique, par suite αb, parallèle à $\alpha't$, est partagée en deux parties égales par $\alpha'\gamma'$ (*). La droite $\alpha\gamma$, parallèle à $\alpha'\gamma'$, puisque c'est son homologue contient alors le symétrique i de b par rapport à $\alpha'\gamma'$. Ce point symétrique est à la rencontre de la circonférence décrite de α' comme centre avec $\alpha'b$ pour rayon et de la circonférence dé crite de γ' comme centre avec $\gamma'b$ pour rayon, c'est donc le centre du cercle inscrit au triangle abc. On voit ainsi que ce centre i est sur $\alpha\gamma$ le pied de la perpendiculaire abaissée de b sur cette droite : *c'est donc le milieu de* $\alpha\gamma$.



Autrement. — Appelons circonférence C une circonférence de cercle qui passe par les extrémités des côtés d'un triangle et qui rencontre à angles droits la bissectrice intérieure issue du sommet opposé à ce côté. On sait qu'*une circonférence* C *contient les centres du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit situés sur cette bissectrice.*

(*) Cette droite n'est pas tracée sur la figure, ni la droite sbt.

Transformons par inversion cette propriété. Prenons pour pôle d'inversion le sommet b du triangle considéré. Soient a, c les inverses des autres sommets de ce triangle. Le cercle ex-inscrit dont le centre est sur la bissectrice intérieure issue de b, a pour inverse le cercle $as\gamma$. Comme l'inverse du centre de ce cercle ex-inscrit est sur $\alpha\gamma$ et sur la bissectrice de l'angle $\alpha b\gamma$, il est alors le milieu i de $\alpha\gamma$. Mais la transformée de la circonférence C qui contient le centre du cercle ex-inscrit, est une circonférence C qui passe par a, c et i, comme cette courbe doit couper la bissectrice bi au centre du cerle inscrit, on voit que *ce centre est le milieu* i *de* $\alpha\gamma$.

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon,** Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite

(*Suite*, v. 1897 ; p. 101).

Passons à la représentation des fractions.

Les nombres binaires 0,1, 0,01, 0,001,.....

représentent les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,..... ;

généralement, l'unité à la suite de $n - 1$ zéros placés après la virgule, représente, dans le système binaire, la fraction $\frac{1}{2^n}$.

Pour exprimer dans le même système une fraction quelconque, $\frac{1}{7}$ par exemple, on procédera comme pour la conversion en fraction décimale, sauf qu'au lieu de multiplier par 10 les restes successifs pour les diviser ensuite par 7, on devra les multiplier par 2. L'opération s'effectue comme il suit :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 7 \\
\times\ 2 & 0.001001001.... \\
\hline
2 & \\
\times\ 2 & \\
\hline
4 & \\
\times\ 2 & \\
\hline
8 & \\
-\ 7 & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

La période du quotient se dessine au troisième chiffre après la virgule, puisque l'opération ramène le reste 1, égal au numérateur de la fraction donnée. Le quotient est la traduction dans le système binaire de la progression géométrique

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \dots,$$

dont la somme est en effet égale à $\frac{1}{7}$.

Si l'on suit la même marche pour la fraction $\frac{1}{17}$, on trouve le développement

$$\frac{1}{17} = 0,000011110000111100001111\dots,$$

ce que l'on peut écrire aussi, en admettant les chiffres négatifs,

$$\frac{1}{17} = 0,0001000\bar{1}0001000\bar{1}0001000\bar{1}\dots.$$

Le premier développement correspond à la progression géométrique

$$\frac{1}{17} = 15 \times \left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{24}} + \dots\right);$$

le second à la progression

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} - \frac{1}{2^{16}} + \dots;$$

et la division y aurait directement conduit si l'on avait pris par excès le quotient lorsque le dividende partiel est égal à 16 ; on obtient alors un reste négatif égal à -1.

On opérerait de même sur une fraction dont le numérateur serait différent de l'unité. On trouve par exemple

$$\frac{4}{9} = 0,011100011100\dots.$$

$$= 0,100\bar{1}001001\dots;$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^{10}} + \dots.$$

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS

De toutes les opérations de l'arithmétique, la plus difficile et la plus sujette à erreur est l'addition, lorsqu'il s'agit d'ajouter un grand nombre d'entiers. Si ces nombres sont écrits dans le système binaire, il n'y a aucune difficulté pour trouver le total des unités contenues dans une même colonne verticale, car cette opération, qui constitue l'addition à proprement parler, revient ici à compter le nombre des chiffres 1 qui figurent dans chaque colonne. La difficulté commence lorsqu'on doit écrire le total obtenu, et reporter aux colonnes suivantes les unités d'ordre supérieur qu'il renferme. Car le report suppose le total traduit dans le système binaire, ce qui ne peut se faire instantanément, sauf pour des nombres très petits. Aussi l'addition binaire, tout en étant une opération des plus simples, en théorie, entraîne-t-elle fréquemment des hésitations et des erreurs dans la pratique. L'emploi des chiffres négatifs tend à la faciliter, en réduisant les totaux partiels, et en clairsemant les chiffres significatifs des nombres sur lesquels on doit opérer.

La soustraction se ramène à l'addition, lorsqu'on admet les chiffres négatifs, en changeant le signe de tous les chiffres composant le nombre à soustraire.

EXEMPLE D'ADDITION :

	$1010\bar{1}0010\bar{1}$
	10010101010
	$10\bar{1}0\bar{1}00100\bar{1}0$
somme	$11001001110\bar{1}$
ou bien	$10\bar{1}00101001\bar{0}0\bar{1}$

EXEMPLE DE SOUSTRACTION :

	$10010\bar{1}01010\bar{1}$	
	$\bar{1}0100\bar{1}0101\bar{0}$	nombre changé de signe ; à ajouter.
	$1\bar{1}100\bar{1}\bar{1}111\bar{1}\bar{1}$	
ou bien	$1100\bar{1}00\bar{1}01\bar{1}$	
ou encore	$10\bar{1}00\bar{1}00\bar{1}001$	

La multiplication binaire n'est qu'une addition, puisque chaque produit partiel, formé en multipliant par le chiffre 1, est la reproduction pure et simple du multiplicande lui-même, qu'il suffit d'écrire à la place convenable. Bien entendu, il faut tenir compte des signes si l'on a admis des chiffres négatifs. On voit que l'arithmétique binaire résout le problème que s'est proposé l'inventeur des logarithmes : elle ramène la multiplication à l'addi-

tion, mais c'est au prix d'un développement un peu long des nombres à multiplier et du produit auquel on parvient.

L'opération la plus simple est la division. Elle se fait dans le système binaire sans aucun tâtonnement, puisque l'on connaît d'avance le seul multiple du diviseur dont on puisse faire usage, à savoir le diviseur lui-même. Il convient, pour éviter toute difficulté, de ne pas admettre au dividende et au diviseur les chiffres négatifs.

EXEMPLE DE DIVISION I

$$\begin{array}{rr|l}
 & 10110111 & 1101 \\
 & \bar{1}\bar{1}0\bar{1} & \overline{1110} \\
 & 10011 & \\
 & 1\bar{1}0\bar{1} & \\
 & 1\bar{1}10 & \\
\text{ou bien} & 1101 & \\
 & \bar{1}\bar{1}0\bar{1} & \\
 & 01 &
\end{array}$$

Le quotient est $1110 = 100\bar{1}0$, et le reste est l'unité. Pour donner un exemple de multiplication binaire, nous nous arrêterons un moment sur l'élévation d'un nombre au carré. Au lieu d'écrire le nombre avec les chiffres binaires, mettons en évidence les puissances de 2 dont le nombre N se compose, et supposons qu'on ait

$$N = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \ldots + 2^\delta.$$

Le carré de N sera égal à l'expression

$$\begin{aligned} N^2 &= 2^{2\alpha} + 2 \times 2^{\alpha+\beta} + 2^{2\beta} + 2 \times 2^{\alpha+\gamma} \\ &\quad + 2 \times 2^{\beta+\gamma} + 2^{2\gamma} + \ldots \\ &= \sum 2^{2\alpha} + \sum 2^{\alpha+\beta+1}; \end{aligned}$$

la première somme comprend autant de termes que l'expression de N, mais avec des exposants doublés ; la seconde, une série de puissances de 2, dont les exposants sont les sommes des exposants donnés pris deux à deux, avec addition d'une unité. Si n est le nombre des puissances de 2 dont la somme forme le nombre N, l'expression de N^2 contiendra avant toute réduction n termes de

la forme $2^{2\alpha}$, et $\frac{n(n-1)}{2}$ termes de la forme $2^{\alpha+\beta+1}$. L'ensemble se prête en général à des réductions importantes, lorsqu'il renferme plusieurs puissances de 2 égales, et plusieurs puissances conséeutives. Si l'on a par exemple trois termes

$$2^{14} + 2^{13} + 2^{12} \times 2.$$

on observera que

$$2^{12} \times 2 = 2^{13}, \quad 2^{13} \times 2 = 2^{14}, \quad 2^{14} \times 2 = 2^{15}$$

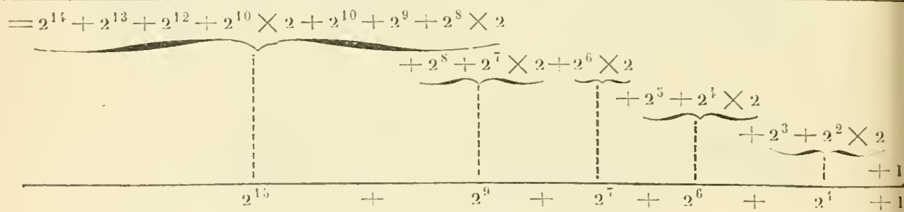
et ces trois termes se fusionnent en un terme unique, 2^{15}.

Soit à élever au carré le nombre

$$N = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2 + 1,$$

traduction du nombre binaire $10110111 = 10\bar{1}00\bar{1}00\bar{1}$. Le carré de ce nombre correspondra les termes suivants :

$$N^2 = \left\{\begin{array}{llllllllllll}
2^{14} & & & + 2^{10} & & + 2^8 & & & & + 2^4 & & + 2^2 + 1 \\
+ 2^{13} & + 2^{12} & & + 2^{10} & + 2^9 & + 2^8 & & & & & & \\
 & & & 2^{10} & & + 2^8 & + 2^7 & + 2^6 & & & & \\
 & & & & & & + 2^7 & + 2^6 & + 2^5 & & & \\
 & & & & & & & & & + 2^4 & + 2^3 & \\
 & & & & & & & & & & & + 2^2
\end{array}\right.$$



c'est-à-dire le nombre 1000001011010001

$$= 1000010\bar{1}0\bar{1}010001.$$

Dans cet exemple, pris au hasard, le nombre N et son carré N^2 ont le même nombre de chiffres significatifs, quand on se borne aux chiffres positifs.

Caractères de divisibilité d'un nombre binaire par un nombre premier $p > 2$.

Le nombre N est exprimable par une somme de puissances de 2.

Supposons que les termes de la somme soient tous positifs, de sorte qu'on ait l'égalité

$$N = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \ldots + 2^\delta.$$

Le reste de la division de N par p sera congru (mod. p) à la somme des restes fournis par les divers termes 2^α, 2^β, ... 2^δ. Si l'on considère la suite des puissances de 2, on observe que les restes de la division par p de ces puissances successives sont assujettis à une loi de périodicité. Le théorème de Fermat montre en effet que l'on retrouve le reste 1 quand on divise par p la puissance de 2 dont le degré est $p - 1$, comme quand on opère sur $2^0 = 1$; dans certains cas, on retrouve le reste 1 pour un exposant moindre, diviseur de $p - 1$. Au-delà, les restes se reproduisent périodiquement.

Prenons pour exemple le nombre $p = 7$. On aura pour les puissances 2^0, 2^1, 2^2 les restes 1, 2 et 4 ; et ces restes se reproduiront au-delà dans le même ordre, de sorte qu'on pourra poser d'une manière générale

$$\left.\begin{aligned} 2^{3k} &\equiv 1 \\ 2^{3k+1} &\equiv 2 \\ 2^{3k+2} &\equiv 4 \end{aligned}\right\} \text{(module 7)}.$$

Que l'on donne donc un nombre écrit dans le système binaire, 100111010011, ce nombre est égal à la somme

$$2^{11} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 ;$$

et en se reportant au tableau des restes, on voit qu'elle est congrue à la somme

$$4 + 4 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 \equiv 2 \text{ (module 7)}.$$

On aurait pu opérer sur le nombre écrit plus simplement avec des chiffres négatifs. On aurait trouvé

$$\begin{aligned} 10100\bar{1}01010\bar{1} &= 2^{11} + 2^9 - 2^6 + 2^4 + 2^2 - 2^0 \\ &\equiv 4 + 1 - 1 + 2 + 4 - 1 \\ &\equiv 9 \equiv 2 \text{ (module 7)}. \end{aligned}$$

(*A suivre*).

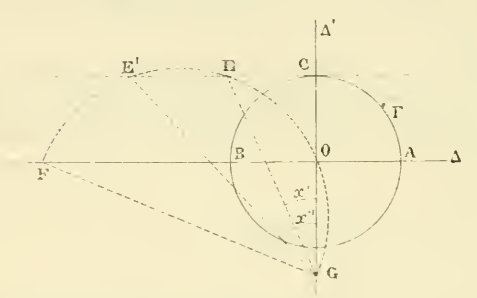
SUR LA CONSTRUCTION DES RACINES DE L'ÉQUATION $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c$.

Dans l'ouvrage de M. Vaes (*Goniometrische Studie*; n° 11, p. 17), ouvrage que nous avons signalé précédemment, (p. 109) on trouve une construction des racines de l'équation

$$(1) \qquad a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

J'indiquerai d'abord cette construction.

Soient Δ, Δ' deux diamètres rectangulaires dans un cercle Γ de rayon b.



Prenons $CG = a$, $OF = C$ et, sur FG comme diamètre décrivons un demi-cercle qui coupe la tangente, en C, à Γ aux points E, E'. Les angles $EGC = x'$, $E'GC = x''$, sont les racines de (1).

On a, en effet,

$$CE.CE' = CO.CG, \quad \text{ou} \quad a \operatorname{tg} x'.a \operatorname{tg} x'' = a.b;$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad \operatorname{tg} x' . \operatorname{tg} x'' = \frac{b}{a}.$$

On a, aussi,

$$(3) \qquad CE + CE' = OF, \quad \text{ou} \quad a(\operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x'') = c.$$

Les relations (2), (3) prouvent que $\operatorname{tg} x'$, $\operatorname{tg} x''$ sont les racines de (1).

En posant $\operatorname{tg} x = z$, l'équation (1) prend la forme

$$az^2 - cz + b = 0,$$

et le problème qui nous occupe est identique au problème classique, problème dans lequel on propose de construire les racines d'une équation du second degré. On sait comment on réalise cette con-

struction et comment on la ramène à un problème de géométrie élémentaire : *trouver deux lignes, connaissant leur somme et l'aire du rectangle construit avec ces deux lignes.*

Les équations (2), (3) montrent comment M. Vaes, dans le tracé que nous venons de résumer, a réalisé la construction élémentaire que nous venons de rappeler.

On peut, d'ailleurs, de ce tracé, comme l'a montré M. Vaes (*loc. cit.*), déduire la condition de réalité des racines de l'équation (1).

En faisant connaître cette solution, j'ajouterai quelques réflexions portant sur les équations trigonométriques, envisagées à un point de vue général.

A chaque équation trigonométrique, ou algébrique, correspondent, pour trouver les valeurs de l'inconnue, des tracés en nombre infini ; il y a lieu de rechercher les plus simples d'entre eux ; qu'on se place au point de vue géométrographique, ou à un autre ; au point de vue pédagogique notamment, dont la simplicité peut être, je crois, ainsi définie : *le tracé le plus simple est celui que les élèves comprennent avec l'effort d'attention le plus faible et qu'ils retiennent le plus facilement.*

Pour se rapprocher de cet idéal, il faut chercher des tracés méthodiques, découlant d'une idée applicable à un groupe déterminé de problèmes. Ces tracés varient sans doute avec les divers exemples proposés ; mais ils se rattachent à un point central d'où découlent, avec la variété inévitable, inhérente à chacun d'eux, les solutions particulières qu'ils comportent.

Prenons le problème du tracé graphique des racines d'une équation trigonométrique ; quelle est l'idée générale qui domine sa solution ? En désignant par u, v les deux lignes trigonométriques qui entrent dans l'équation considérée (il n'y en a jamais plus de deux, si l'on utilise les formules fondamentales de la trigonométrie), on aura donc une relation $f(u, v) = 0$. Mais, entre u, v, existe une certaine égalité $\varphi(u, v) = 0$.

Alors, en prenant deux axes Ou, Ov, on obtiendra le tracé cherché en construisant, dans ce système, les deux courbes qui correspondent aux équations $f = 0$, $\varphi = 0$.

Ainsi pour l'équation

$$(1') \qquad a \sin x + b \cos x = c,$$

la méthode conduit, systématiquement, à construire une droite Δ,

$$(\Delta) \equiv au + bv - c = 0,$$

et un cercle Γ,

$$(\Gamma) \equiv u^2 + v^2 - 1 = 0.$$

C'est ainsi que nous avons été conduit à la solution que rappelait M. Vaes (*Journal*, p. 110)

Si nous prenons maintenant l'équation (1), la méthode que nous indiquons ici nous conduit à poser (*)

$$a \operatorname{tg} x = u, \quad b \operatorname{tg} y = v,$$

et à considérer les deux équations

$$u - v = c, \quad uv = ab.$$

Dans ces formules a, b, c, sont des lignes données; on est ainsi ramené, par une voie naturelle, au problème classique rappelé plus haut.

On sait d'ailleurs que le problème qui correspond à (1) peut être ramené à celui qui correspond à l'équation (1') puisque l'équation

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c,$$

peut s'écrire

$$c \sin 2x + (a - b) \cos 2x = a + b.$$

G. L.

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897; p. 111).

23. — *Formules relatives au point N et à son conjugué N'.* La point N de rencontre de IP et de la circonférence O est le centre commun des cercles inscrits dans les triangles

(*) Cette idée et quelques-unes des applications qui s'y rattachent, notamment la résolution graphique des équations (1), (1') ont été exposées par nous dans le *Bulletin Scientifique*; 1889, p. 60 à 66.

BPD et APC. La position de ce point est déterminée par la relation :

$$\frac{PN}{IN} = \frac{hl}{2kf}, \quad \text{d'où} \quad IN = \frac{2kf\,IP}{hl + 2kf},$$

et

$$PN = \frac{2Sabcd}{fhl(hl + 2kf)},$$

et celle de son conjugué N′ par

$$\frac{PN'}{IN'} = \frac{hl}{2kf}, \quad \text{d'où} \quad IN' = \frac{2kf\,IP}{hl - 2kf},$$

et

$$PN' = \frac{2Sabcd}{fhl(hl - 2kf)}.$$

On peut vérifier que : $PN . PN' = PO . PI = \overline{P\omega}^2$.

Les coordonnées du point N sont :

$$x = \frac{(a-c)\left[k(d+b)^2 - 2fhl\right]}{8f(b+d)\sqrt{(p-a)(p-c)}}, \quad y = \frac{(d-b)\left[k(a+c)^2 - 2fhl\right]}{8f(a+c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}.$$

D'autre part :

$$\widehat{BPD} = 2^{dr} - 2A, \qquad \widehat{APD} = 2^{dr} - 2D,$$

$$\widehat{BPI} = \widehat{DPI} = 1^{dr} - A = \widehat{ODI}, \qquad \widehat{API} = \widehat{CPI} = 1^{dr} - D = \widehat{OAI},$$

on déduit de là les distances Δ_m et Δ_n du centre O aux diagonales.

$$\Delta_m = R\cos D, \qquad \Delta_n = R\cos A; \qquad \text{d'où :}$$

rayon du cercle inscrit à BPD : $NP\cos A = \dfrac{2Sabcd\cos A}{fhl(hl + 2kf)}$,

rayon du cercle inscrit à APC : $NP\cos D = \dfrac{2Sabcd\cos D}{fhl(hl + 2kf)}$,

rayon du cercle circonscrit à BPD : $\dfrac{n}{2\sin 2A}$,

rayon de cercle circonscrit à APC : $\dfrac{m}{2\sin 2D}$.

24. — *De quelques coefficients angulaires : tangentes trigonométriques des angles* A, B, C, D ; *tangentes des angles que les diagonales font avec les côtés.*

On a :

$$\begin{array}{l|l l|l l}
SH & \dfrac{\delta^2}{\alpha\beta}, & SI & -\dfrac{\delta\gamma}{\alpha^2}, & \operatorname{tg} A = \dfrac{\delta\gamma - \alpha\beta}{\alpha\gamma + \beta\delta}, \\
SK & -\dfrac{\delta^2}{\alpha\beta}, & SO & \dfrac{\delta\gamma}{\beta^2}, & \operatorname{tg} B = \dfrac{-(\delta\gamma + \alpha\beta)}{\alpha\gamma - \beta\delta}, \\
QH & \dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}, & QI & -\dfrac{\beta^2}{\delta\gamma}, & \operatorname{tg} C = -\dfrac{\delta\gamma - \alpha\beta}{\alpha\gamma - \beta\delta}, \\
QK & -\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}, & QO & \dfrac{\alpha^2}{\delta\gamma}, & \operatorname{tg} D = \dfrac{\delta\gamma + \alpha\beta}{\alpha\gamma - \beta\delta},
\end{array}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{m,a}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,c}) = \frac{\alpha(\delta - \beta)}{\alpha^2 + \delta\beta}, \quad \operatorname{tg}(\widehat{m,b}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,d}) = \frac{\beta(\gamma + \alpha)}{\alpha\gamma - \beta^2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{m,d}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,b}) = \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\beta^2 + \alpha\gamma}, \quad \operatorname{tg}(\widehat{m,c}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,a}) = \frac{\alpha(\beta + \delta)}{\alpha^2 - \beta\delta}.$$

25. *Rayons des cercles tangents à trois côtés consécutifs : 1° intérieurs* $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$; *2° extérieurs* $\rho'_a, \rho'_b, \rho'_c, \rho'_d$ (l'indice correspond au côté intermédiaire touché par le cercle).

$$\frac{\rho_a}{a(p-a)(d+b)\cos^2\frac{1}{2}} = \frac{\rho_b}{b(p-b)(a+c)\sin^2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\rho_c}{c(p-c)(d+b)\cos^2\frac{1}{2}} = \frac{\rho_d}{d(p-d)(a+c)\sin^2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\rho'_a}{a(p-c)(d+b)\cos^2\frac{1}{2}} = \frac{\rho'_b}{b(p-d)(a+c)\sin^2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\rho'_c}{c(p-a)(d+b)\cos^2\frac{1}{2}} = \frac{\rho'_d}{d(p-b)(a+c)\sin^2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}(a+c)(d+b)\sin 1}.$$

Soient : U_b, U'_b, U_d, U'_d les centres des cercles situés sur SL.
V_a, V'_a, V_c, V'_c les cercles des cercles situés sur QL.

$$LU_b = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-b}{p-d}} \frac{\varepsilon}{(a+c)(d+b)},$$

$$LV_a = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-a}{p-c}} \frac{\varepsilon}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LU}_d = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-d}{p-b} \frac{-\varepsilon}{(a+c)(d+b)}},$$

$$\mathrm{LV}_c = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-c}{p-a} \frac{-\varepsilon}{(a+c)(d+b)}},$$

$$\mathrm{LU'}_b = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-d}{p-b} \frac{2p}{(a+c)(d+b)}},$$

$$\mathrm{LV'}_a = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-c}{p-a} \frac{-2p}{(a+c)(d+b)}},$$

$$\mathrm{LU'}_d = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-b}{p-d} \frac{-2p}{(a+c)(d+b)}},$$

$$\mathrm{LV'}_c = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-a}{p-c} \frac{2p}{(a+c)(d+b)}}.$$

Ces formules font connaître les éléments linéaires des quadrilatères inscriptibles obtenus par les rencontres des bissectrices intérieures ou extérieures de ABCD ; savoir : $U_bU_dV_aV_c$ et $U'_bU'_dV'_aV'_c$ dont les éléments angulaires sont d'aillenrs connus.

Rayons des cercles circonscrits aux triangles aQ, bS, cQ, dS.

$$\mathfrak{R}_a = \frac{ah^2l^2}{4S(a^2-c^2)}, \quad \mathfrak{R}_b = \frac{bh^2l^2}{4S(d^2-b^2)}.$$

$$\mathfrak{R}_c = \frac{ch^2l^2}{4S(a^2-c^2)}, \quad \mathfrak{R}_d = \frac{dh^2l^2}{4S(d^2-b^2)}.$$

Comme épreuve des formules ci-dessus et de celles qui donnent les coordonnées du centre O en fonction de α, β, γ, δ, on propose de vérifier l'identité suivante dans laquelle on sait que : $\theta^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et $\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2$:

$$\left\{ \frac{\alpha^2\mu^2}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)} - \frac{\beta(\gamma\theta-\alpha\mu)}{\gamma\theta+\alpha\mu} \right\}^2 + \frac{\gamma^2\theta^4}{(\gamma^2-\alpha^2)^2}$$

$$= \frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)} \left\{ \frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)} - \frac{4\alpha\beta\gamma}{\gamma\theta+\alpha\mu} \right\},$$

qui a été obtenue en appliquant la formule d'Euler $D^2 = R(R-2r)$ au triangle résultant de l'hypothèse $b = o$ ou $\delta = \beta$ (coïncidence des points B, C, S, I et P).

En remplaçant dans cette identité μ par $-\mu$, on aura celle qui convient au cercle ex-inscrit tangent au côté d.

Quant à celle qui répond à l'ex-inscrit qui touche a, on trouvera :

$$\left\{\frac{\alpha^2\mu^2}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}+\beta\right\}+\left\{\frac{\gamma\theta^2}{\gamma^2-\alpha^2}-\frac{2\gamma\theta}{\mu-\theta}\right\}^2=\frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}\left\{\frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}+\frac{4\beta\gamma}{\mu-\theta}\right\},$$

et si enfin, dans cette dernière, on remplace μ par $-\mu$ on aura celle qui convient au cercle ex-inscrit tangent au côté c.

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 114)

TORRICELLI

Presque en même temps que Cavalieri, Roberval avait imaginé également une méthode de mesurage identique à la sienne, et qu'il avait découverte par la lecture approfondie des œuvres d'Archimède. Comme les travaux de Roberval n'ont été publiés que près de soixante ans après ceux de Cavalieri, ils n'ont guère contribué au progrès de la Géométrie de la mesure que par l'émulation qu'ils ont produite chez Pascal (*). Nous en dirons autant de certains écrits de Fermat.

Il n'en est pas de même de l'opuscule de Torricelli : *Quadratura parabole* (Florence, 1644), où il montre une nouvelle manière d'employer la méthode des indivisibles. Nous allons traiter, d'après lui, la mesure du cercle et celle du cône, de la sphère et du solide produit par une hyperbole équilatère tournant autour de son asymptote.

La surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont les côtés sont respectivement égaux au rayon et à la circonférence. Soient le cercle O et le triangle rectangle OAB (*fig.* 37), qui sont dans ce cas. Menons dans le triangle, et parallèlement à AB, la droite quelconque MP, qui est égale

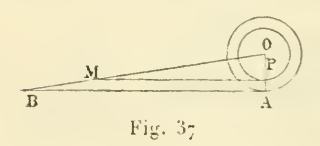


Fig. 37

(*) Nous en dirons un mot plus loin, en parlant de Pascal.

à la circonférence de rayon OP. Toutes les droites du triangle sont ainsi égales aux circonférences du cercle : de là le théorème.

Un cône circulaire droit égale le tiers du cylindre circonscrit. Supposons d'abord le rayon égal à la hauteur (*fig.* 38), sur le cercle MN produit dans le cône par une section parallèle à la base AB, construisons un cylindre QN, dont la surface latérale sera égale au cercle MN ; par suite, la somme des surfaces latérales de tous les cylindres analogues, c'est-à-dire le volume concave ADSBC, est égal à la somme des cercles MN, c'est-à-dire le cône SAB, lequel est donc le tiers du cylindre.

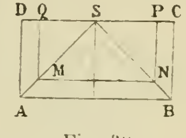


Fig. 38

Soit maintenant un cône quelconque A : considérons le cône B de même hauteur et dont le rayon de la base est égal à cette même hauteur. Les sections de A et de B à des hauteurs égales sont dans un rapport constant, qui est aussi celui des sections des cylindres circonscrits. Donc,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{cyl. cir. à } A}{\text{cyl. cir. à } B}$$

comme B est le tiers du cylindre qui lui est circonscrit, il en est de même de A.

La démonstration de Torricelli n'est pas tout à fait celle que nous venons d'exposer. Il considère, d'emblée, un cône quelconque, ce qui lui donne

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{QS}{SD},$$

d'où

$$\frac{MQ.QS}{AD.SD} = \frac{\overline{QS}^2}{\overline{SD}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{MQ.QS}{\overline{QS}^2} = \frac{AD}{SD} = c^{te}.$$

Or, les tranches enroulées les unes autour des autres et constituant le solide creux désigné tout à l'heure ont une épaisseur égale à celle des tranches empilées du cône, leurs nombres sont comme SD à AD ; par conséquent

$$\frac{\Sigma(\text{tr. } MQ)}{\Sigma(\text{tr. } MN)} = \frac{AD}{SD}\,\frac{SD}{AD} = 1$$

il s'ensuit que, dans tous les cas, le cône est égal au reste du cylindre.

La sphère équivaut à la moitié du cône dont la hauteur et le rayon sont égaux au diamètre de la sphère. On a (*fig.* 39)

$$MP^2 = SP.PC = KP.KH$$

donc le cercle MN est égal à la moitié de la surface latérale du cylindre KG, et par suite, la somme des cercles tels que MN, ou la sphère, égale à la moitié de la somme des surfaces cylindriques analogues, ou le cône (*).

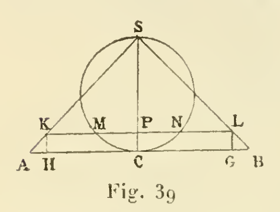


Fig. 39

Le solide produit par la révolution de l'hyperbole équilatère AM (*fig.* 40) *tournant autour de l'asymptote* OS *est égal au cylindre* AB, A *désignant le sommet.* On a en effet

$$MP.MS = \overline{AE}^2 ;$$

ce qui montre que la surface latérale du cylindre MP a une valeur constante, qui est celle du cercle, base du cylindre AD. On peut supposer autant de tranches analogues à MP que de tranches circulaires composant le cylindre AD; et, de plus, comme CO = CA, les premières de ces tranches auront une hauteur égale à celle des deuxièmes. Donc le solide proposé est égal au cylindre, quoi que l'aire de la surface génératrice soit infinie.

Fig. 40

C'est à Torricelli qu'est due la formule donnant l'expression du volume d'un solide en fonction des bases supérieure, médiane et inférieure, quand les sections de ce solide sont des coniques. (Voir la note IV). (*A suivre*).

(*) Torricelli avait déjà donné (*De sol. sph.*) une démonstration rigoureuse par la méthode des Anciens du volume de la sphère. Dans cet ouvrage, écrit probablement avant qu'il ait connu la *Geom. indiv.* de Cavalieri, il démontre ce volume par la même méthode que celle de la proposition V du livre III de ce dernier ouvrage, en décomposant la sphère, le cylindre et le cône en tranches d'égales hauteurs, en se servant du théorème d'Archimède.

BIBLIOGRAPHIE

Éléments de Géométrie de A. Amiot ; *nouvelle édition, entièrement refondue* par F. Vintéjoux (*Librairie Delagrave*, 1897).

Au moment où, comme j'ai dû l'annoncer récemment à M. Delagrave, l'état de ma santé me force, à mon très vif regret, à quitter la direction de ce Journal, il m'est particulièrement agréable de rendre compte, ici, de cet ouvrage. En effet, sur la première page de ce livre, je trouve, réunis par une heureuse coïncidence, trois noms qui me touchent à des titres divers ; mais, tous les trois, bien profondément. Amiot, c'est avec le vieux traité de Legendre, le premier livre de Géométrie que j'ai lu, aux premiers jours de mon instruction mathématique ; M. Vintéjoux, c'est le nom du collègue aimable, de l'ami si sûr que j'ai appris à estimer toujours un peu plus depuis vingt ans ; M. Delagrave, enfin, l'éditeur de ce livre, l'homme auquel, soit par ma collaboration au *Journal de mathématiques*, soit par les ouvrages que j'ai publiés chez lui, je suis attaché depuis longtemps, et par des liens si sympathiques. On comprend que, tous ces souvenirs ne peuvent me pousser, dans l'analyse de cet ouvrage, qu'à un jugement absolument optimiste ; mais je le formule sans réserve, sans avoir à craindre que les sympathies que je viens de rappeler puissent me conduire à l'exagération ; le livre actuel est, dans son genre, une perfection.

La caractéristique de l'ouvrage d'Amiot, le côté original qui a fait son succès, un succès qui a résisté à l'usure attristante des années, c'est l'excellence du plan qu'il a conçu pour écrire son livre ; notamment, cette division en leçons, division faite avec l'habileté qui pouvait appartenir au professeur incomparable qu'était Amiot.

M. Vintéjoux a eu mille fois raison de ne pas toucher à cette caractéristique et de conserver le plan original de l'ouvrage ; ce plan est parfait. Que fallait-il pour remettre la Géométrie d'Amiot dans le courant pédagogique moderne ? Au fond, bien peu de chose. Il fallait simplement, complétant l'œuvre que M. Vintéjoux avait entreprise déjà en 1880, et menée à bien, ajouter, tout en maintenant le plan général, quelques développements plaçant la Géométrie d'Amiot au niveau des perfectionnements qui ont été introduits, en ces dernières années, dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. C'est ce qui a été fait excellemment, dans un style simple, clair et bien français.

M. Vintéjoux, en me causant dernièrement de ce livre dont l'apparition était prochaine, m'a donné toutes les raisons (excellentes, mais trop longues à exposer ici) pour lesquelles il n'a fait ni la citation de noms d'auteurs, ni l'indication de certaines sources scientifiques auxquelles il a puisé le fond de quelques démonstrations.

Il m'a prié pourtant, sachant que je me proposais, avant de quitter le Journal, le plaisir de consacrer quelques lignes à l'analyse de cet ouvrage, de signaler deux emprunts qu'il a faits au *Journal de mathématiques élémentaires*.

On trouvera, p.p. 367 et suivantes, le développement de la théorie relative au déplacement des figures égales dans l'espace. Le sujet est délicat et l'on sait qu'il n'a pas toujours été exposé avec toute la rigueur voulue. Cette rigueur existe complètement dans le chapitre que nous signalons, et dont les premiers paragraphes ont été inspirés par un article de M. Tarry (*loc. cit.*, 1895, p. 79).

Enfin, M. Vintéjoux m'a encore prié de faire savoir que la démonstration, à la forme près, du théorème II de la page 551 est empruntée à un article de M. Dorlet (*loc. cit.*, 1894, p. 241).

On trouvera à la fin de l'ouvrage, que nous signalons aux élèves comme un guide excellent et d'une parfaite clarté, un chapitre consacré à la géométrie du triangle ; géométrie qui, aujourd'hui, malgré quelques oppositions dues à des préventions qui ont fini par s'éteindre, a pénétré dans l'enseignement élémentaire. Peut-être le chapitre est-il un peu court, et il m'a semblé qu'il gagnerait à être complété dans la future édition.

Mais je sais que l'ouvrage d'Amiot est avant tout un livre qui doit rester simple. Il n'a aucune prétention à l'encyclopédie, il ne vise pas à donner tous les résultats, mais seulement ceux qui doivent être mis en première ligne et qui peuvent être considérés comme indispensables ; c'est probablement pour se conformer à cet esprit général du livre que le chapitre en question se trouve quelque peu écourté.

G. L.

EXERCICES

27. — *Le cercle qui passe par les centres des cercles ex-inscrits à un triangle a pour centre le symétrique du centre du cercle inscrit par rapport au centre du cercle circonscrit.*

(M).

28. — *Les bissectrices intérieures des angles d'un triangle* abc *sont les hauteurs du triangle qui a pour sommets les points où ces bissectrices rencontrent le cercle circonscrit* abc. (M).

29. — *On donne deux circonférences de cercles dont l'une a son centre* o *sur l'autre. Par* o, *on mène une transversale qui rencontre ces courbes l'une en* a, *l'autre en* b ; *par le milieu de* ab, *on élève une perpendiculaire à cette droite : démontrer que cette perpendiculaire reste tangente à un cercle, lorsque la transversale tourne autour de* o. (M).

30. — *Dans un triangle* Δ *où* HO *est parallèle à* BC :

1° *la droite qui joint le sommet* A *au symétrique de* I *relativement à* BC *est perpendiculaire à* HI ;

2° *dans ce triangle* Δ *aucun des angles ne peut être obtus; l'angle* A *est toujours compris entre les deux autres, il ne peut varier qu'entre* 60° *et* 90°;

3° *si l'angle* (BC, HO) *est désigné par* φ, *on a* :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos A - 2\cos B\cos C}{\sin(B - C)} = \frac{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - 3}{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^3\cos C + c^3\cos B - a^3}{abc\sin(B - C)} = \frac{(b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 - 2a^2)}{4S(b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{a^2\left[3(b^2 + c^2 - a^2) - 4h^2\right]}{4S(b^2 - c^2)} = \frac{\left[12R^2 - (2a^2 + b^2 + c)\right]\operatorname{tg} A}{b^2 + c^2}.$$

(Bernès).

31. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{a\cos^2\varphi}{a - b + x} + \frac{b\sin^2\varphi}{b - a + x} = \frac{1}{2}.$$

(E. N. Barisien).

32. — *On donne deux circonférences concentriques* (C) *et* (C'). *On prend un point fixe* P *sur* (C); *une tangente mobile à* (C') *coupant* (C) *en* A *et* B; *le lieu de l'orthocentre du triangle* PAB *est un cercle.* (H. L'Huillier).

33. — *En supposant* $a > b$, *on a toujours*

$$\sqrt{4a^2 - 2b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} > a.$$

Interpréter cette inégalité par la considération d'une ellipse dont les axes ont pour longueur 2a *et* 2b. (E. N. Barisien).

QUESTIONS PROPOSÉES

804. — On donne un triangle *asb*. Dans l'angle *asb* on inscrit un cercle tangent en *a* à *as* et un cercle tangent en *b* à *bs* : démontrer que ces courbes interceptent des segments égaux sur *ab*.

(*Mannheim*).

805. — On donne un triangle *abc* et un point *o* de son plan. Extérieurement au triangle *aob*, on mène la bissectrice de l'angle

aob, cette droite coupe *ab* en un certain point. On a de même des points sur *ac*, *bc* : démontrer que ces trois points sont en ligne droite. (*Mannheim*).

806. — La médiane *bm* d'un triangle donné *abc* est rencontrée en *d* par la perpendiculaire élevée, à *ab*, au milieu de ce côté : on mène la droite *ad*. De même, on a une droite *ce* qui joint *c* au point où *bm* est rencontrée par la perpendiculaire à *bc* élevée au milieu de ce côté.

Les droites *ad* et *ce* se coupent en *o*. Démontrer que les droites *bo*, *bm* sont également inclinées sur *ba* et *bc*. (*Mannheim*).

807. — On mène la droite qui joint le sommet *b* d'un triangle donné *abc* au milieu de la hauteur de ce triangle, qui est issue de *a*.

Cette droite coupe *ac* en un point d'où l'on mène une parallèle à *ab* et l'on obtient le point *d* à sa rencontre avec *bc*.

De même en employant la hauteur qui part de *c* on obtient un point *e* sur *ab*. Démontrer que *ed* est perpendiculaire à la médiane issue de *b*. (*Mannheim*).

808. — Du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on lui élève une perpendiculaire. Cette droite rencontre en deux points les bissectrices de l'angle droit de ce triangle : démontrer que les distances de ces points aux côtés de l'angle droit sont égales : l'une, à la demi-somme, l'autre, à la demi-différence de ces côtés. (*Mannheim*).

809. — Un triangle donné a pour sommets *a*, *b*, *c* et pour angles α, β, γ.

Démontrer que le lieu d'un point *m*, tel que

$$\overline{ma}^2 \sin 2\alpha + \overline{mb}^2 \sin 2\beta + \overline{mc}^2 \sin 2\gamma = \text{const}^{\text{te}},$$

est un cercle concentrique au cercle *abc*. (*Mannheim*).

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES
Par M. **A. Tissot**
(*Suite*, 1897, page 121)

CONIQUES BITANGENTES A UN MÊME CERCLE

58. — *Lorsque deux coniques sont bitangentes à un même cercle, deux de leurs sécantes communes forment, avec les droites des contacts, un faisceau harmonique.*

Il résulte en effet des propriétés établies [**14** et **46**] que chaque point commun aux deux coniques fait partie du lieu des points dont les distances aux droites des contacts ont entre elles un rapport donné.

Ce rapport sera égal à l'unité si le cercle bitangent se trouve de même espèce pour les deux coniques, et que celles-ci soient semblables entre elles; alors chacune des deux sécantes coïncidera avec la bissectrice de l'un des angles des droites des contacts, et leur angle sera droit.

59. — *La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle bitangent est une conique.*

Soient H (*fig.* 34) le centre du cercle, KU la droite des contacts, M un point quelconque de la conique, MU la tangente en ce point, HD la perpendiculaire abaissée de H sur MU, M′ le point de HD où se trouve le pôle de MU par rapport au cercle. On veut démontrer que le lieu de M′ est une conique.

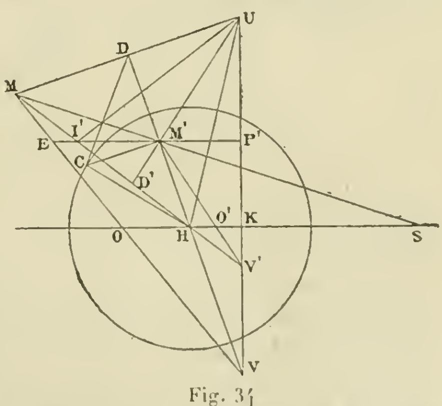


Fig. 34

Nous supposerons d'abord que le cercle bitangent soit de première espèce; alors MU ne le rencontrera pas et M′ lui sera

intérieur. Joignons, aux points D et H, l'une des extrémités C de la corde principale de M', laquelle est la corde polaire de D. Dans le triangle rectangle CDH, nous aurons $\overline{CM'}^2 = M'D.M'H$. La polaire de M dans le cercle doit passer par M'; elle doit aussi passer par U [**4**]; elle sera donc UM', d'où il suit que UM' est perpendiculaire à HM; soit D' le point de rencontre de ces deux lignes. De M', abaissons, sur KU, la perpendiculaire M'P' et appelons I' son intersection avec HM; dans les deux circonférences qui seraient décrites sur HU et sur I'U comme diamètres, on aurait $M'D.M'H = M'D'.M'U$ et $M'D'.M'U = M'I'.M'P'$.

Il vient donc

$$\overline{CM'}^2 = M'I'.M'P'.$$

Le saillant S doit se trouver sur la polaire double de U [**1**]. De plus, O étant le centre de la conique, les trois lignes MO, DH, KU doivent concourir en un point V [**4**]; soit E l'intersection de la première avec M'P'; sur les parallèles EP', OS, on aura

$$\frac{M'I'}{M'E} = \frac{HS}{OS}, \qquad \frac{M'E}{M'P'} = \frac{OH}{HK}.$$

De ce que KU est la polaire de S dans le cercle bitangent, on conclut $HK.HS = r^2$, r étant le rayon de ce cercle; on a aussi [**21**] $HK.OS = b^2$, de sorte que le rapport de HS à OS est celui de r^2 à b^2. Quant au rapport entre OH et HK, il est le même qu'entre c^2 et b^2 [**22**]; il vient donc

$$\frac{M'I'}{M'E} = \frac{r^2}{b^2}, \qquad \frac{M'E}{M'P'} = \frac{c^2}{b^2},$$

d'où

$$M'I' = \frac{c^2 r^2}{b^4} M'P', \qquad CM' = \frac{cr}{b^2} M'P'.$$

Ainsi le rapport de CM' à M'P' est constant. On peut toujours construire une ellipse dans laquelle ce rapport soit celui de la demi-distance focale c' à la moitié b' du petit axe, et qui, de plus, admette comme cercle bitangent de seconde espèce le cercle donné, avec KU comme droite des contacts. D'après les propriétés établies [**47** et **48**], cette ellipse sera le lieu du point M'.

Lorsque KU rencontre le cercle, c'est-à-dire lorsque les points de contact de celui-ci avec la conique primitive sont réels, on voit de suite que la polaire réciproque touche le cercle en ces mêmes

points. Comme d'ailleurs UM', polaire de M, est tangente à la courbe en M', et que HM est perpendiculaire à UM', le centre O' doit se trouver sur la droite joignant M' au point d'intersection V' de HM avec KU [4]. Il en sera de même dans le cas des contacts imaginaires, puisque le point O' ainsi déterminé divise HK en parties proportionnelles à MI', M'P', par conséquent à $c^2 r^2$, b^4, par conséquent à c'^2, b'^2.

Les foyers seront les intersections de la perpendiculaire élevée en O', sur HK, avec la circonférence décrite sur HS comme diamètre [45]. Les sommets du petit axe seront les pôles des tangentes aux sommets de l'axe focal de la courbe primitive. Les éléments linéaires de la nouvelle courbe satisferont d'ailleurs aux relations

$$\frac{a'^2}{\mathrm{HK}} = \frac{b'^2}{\mathrm{O'K}} = \frac{c'^2}{\mathrm{O'H}} = \mathrm{O'S}.$$

Supposons maintenant que le cercle directeur de la transformation soit un cercle bitangent de seconde espèce. La tangente UM à la conique le rencontrera; de M' on pourra lui mener une tangente, et si, au point de contact, on place la lettre C, qui servait tout-à-l'heure à désigner une extrémité de la corde principale, on pourra établir, sans rien changer à la démonstration précédente, que le rapport de M'C à M'P' est constant. Ici le centre du cercle ne se trouve plus nécessairement à l'intérieur de la conique primitive, et, quand il y aura des tangentes au cercle issues de ce point, elles fourniront, dans la transformée, des points à l'infini. Le lieu peut donc être une ellipse, une parabole ou une hyperbole, si la conique primitive est une ellipse. Lorsque celle-ci sera une hyperbole, la polaire réciproque sera aussi une hyperbole.

Problèmes. — *Construire les éléments d'une conique bitangente à un cercle donné, connaissant un point et deux tangentes;* ou bien *une tangente et deux points.*

(*A suivre*).

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

(*Suite*, v. 1897 ; p. 126).

PARTAGE D'UNE QUANTITÉ EN PARTIES ÉGALES

Certaines quantités peuvent être aisément divisées en deux parties égales, en 4, en 8,.,. suivant les puissances de 2, tandis qu'il n'existe pas de méthode rigoureuse pour les diviser en 3, en 5, et 7... parties. Il en est ainsi, par exemple, pour un arc de cercle. L'emploi de la numération binaire donne dans ce cas une solution approximative du problème, et l'erreur commise peut être rendue aussi petite qu'on voudra.

Soit proposé de partager une quantité en P parties égales, P étant un nombre impair donné, égal au produit de facteurs premiers npq,... Il suffira de diviser la quantité en n parties égales, l'une de ces parties en p parties, l'une de celles-ci en q parties, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des facteurs de P. Nous n'avons donc à nous occuper que du partage en n parties égales, n étant un nombre premier impair.

Formons les puissances successives de 2, et soit 2^μ la plus petite puissance qui, divisée par n, laisse un reste égal à l'unité. La différence $2^\mu - 1$ sera divisible par n, et soit n' le quotient, de sorte qu'on ait

$$nn' = 2^\mu - 1.$$

On en déduit

$$\frac{1}{n} = \frac{n'}{2^\mu - 1} = n'\left(\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{2^{3\mu}} + \dots\right),$$

ce qui donne le développement de la fraction $\frac{1}{n}$ en fraction binaire, développement périodique, dont les valeurs successives expriment la fraction $\frac{1}{n}$ avec autant d'approximation qu'on veut, et sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 2.

Au lieu de chercher le plus petit exposant qui rende $2^\mu - 1$ divisible par n, cherchons l'exposant minimum qui rende $2^\mu + 1$

divisible par n, et soit

$$nn' = 2^{\mu} + 1,$$

n' étant un quotient entier. Il en résulte

$$\frac{1}{n} = \frac{n'}{2^{\mu} + 1} = n'\left(\frac{1}{2^{\mu}} - \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{2^{3\mu}} - \frac{1}{2^{4\mu}} + \dots\right),$$

Série à termes alternativement positifs et négatifs, qui donne un autre développement binaire de la fraction $\frac{1}{n}$. Ici, encore, la somme d'un nombre entier de périodes exprime approximativement $\frac{1}{n}$, avec autant d'approximation qu'on le veut, par une fraction dont le dénominateur est une puissance de 2; des bissection successives, répétées μ fois pour chaque terme, feront donc connaître par leur somme algébrique la quantité cherchée alternativement par défaut et par excès.

Le tableau suivant résume pour les petits nombres les résultats des deux méthodes, et permet d'écrire immédiatement les développements dont on peut avoir besoin.

μ	2^{μ}	$2^{\mu} - 1$	$2^{\mu} + 1$
1	2	1	3
2	4	3	5
3	8	7	$9 = 3^2$
4	16	$15 = 3 \times 5$	17
5	32	31	$33 = 3 \times 11$
6	64	$63 = 7 \times 9$	$65 = 5 \times 13$
7	128	127	$129 = 3 \times 43$
8	256	$255 = 5 \times 3 \times 17$	257
9	512	$511 = 7 \times 73$	$513 = 19 \times 3^3$
10	1024	$1023 = 3 \times 11 \times 31$	$1025 = 5^2 \times 41$
11	2048	$2047 = 23 \times 89$	$2049 = 3 \times 683$
12	4096	$4095 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$	$4097 = 17 \times 241$
13	8192	8191	$8193 = 3 \times 2731$
14	16384	$16383 = 3 \times 43 \times 127$	$16385 = 3 \times 5 \times 1091$
15	32768	$32767 = 7 \times 4681$	$32769 = 3^2 \times 11 \times 331$

En s'aidant des nombres inscrits dans ce tableau, on pourra

écrire immédiatement les séries qui représentent le développement binaire de certaines fractions $\frac{1}{n}$ dont le dénominateur figure au tableau.

Des nombres inscrits dans la colonne $2^\mu - 1$, on déduira les développements en progression géométrique à termes tous positifs :

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \dots$$

$$= 9 \times \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{18}} + \dots\right)$$

$$= 73 \times \left(\frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{2^{27}} + \dots\right),$$

qui correspondent à la fraction binaire 0,001001001... ;

$$\frac{1}{89} = 23 \times \left(\frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{44}} + \dots\right)$$

$$= (0{,}0000001011100000010111\dots\dots)_2$$

$$= (0{,}000010\bar{1}00\bar{1} \mid 000010\bar{1}00\bar{1} \mid \dots)_2.$$

Si l'on prend les nombres de la colonne $2^\mu + 1$, les développements présenteront des termes alternés :

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} - \frac{1}{2^{16}} + \dots$$

$$= 0{,}0001 \mid 000\bar{1} \mid 0001 \mid 000\bar{1}\dots.$$

$$\frac{1}{19} = 27 \left(\frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{2^{27}} - \frac{1}{2^{36}} + \dots.\right)$$

$$= 0{,}000011011 \mid 0000\bar{1}\bar{1}0\bar{1}\bar{1} \mid \dots$$

$$= 0{,}000100\bar{1}0\bar{1} \mid 000\bar{1}00101 \mid \dots,$$

$$\frac{1}{43} = 3 \left(\frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{21}} - \frac{1}{2^{28}} + \dots\right)$$

$$= 0{,}0000011 \mid 00000\bar{1}\bar{1} \mid \dots$$

$$= 0{,}000010\bar{1} \mid 0000\bar{1}01 \mid \dots$$

$$\frac{1}{257} = \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{24}} - \frac{1}{2^{32}} + \dots$$

$$= 0{,}00000001 \mid 0000000\bar{1} \mid \dots.$$

L'opération, arrêtée à un certain terme de la série, conduit à une valeur approchée de la fraction cherchée, avec un reste. Si ce reste est suffisamment petit, il arrivera fréquemment dans les applications qu'on pourra le diviser en n parties égales sans erreur appréciable, ce qui complètera la solution.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de diviser en sept parties égales un arc de cercle, plus petit qu'un quadrant. On cherchera par des bissections successives la valeur du huitième, du soixante-quatrième, du cinq-cent-douzième de l'arc donné. La somme que l'on obtiendra en réunissant les trois parties que l'on vient d'obtenir représentera la fraction

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}=\frac{73}{512}$$

de l'arc donné. La différence avec le septième que l'on cherche est égale à

$$\frac{1}{7}-\frac{73}{512}=\frac{1}{7\times 512}.$$

Elle est donc égale au septième de la plus petite partie obtenue, et il suffirait d'ajouter à la somme la septième partie du dernier arc qui la compose, pour avoir une correction rigoureuse de la solution approximative. Or, le cinq cent douzième de l'arc donné est assez petit, pour que, au point de vue pratique, on puisse le partager en sept parties égales à la façon d'un segment rectiligne. On obtiendra en définitive une valeur très approchée, sinon rigoureuse, du septième de l'arc donné.

(*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 134).

25. — *Autre calcul des diagonales du quadrilatère* ABCD (*fig.* 5).

Soit ABCD le quadrilatère inscriptible : construisons le rectangle

$J_1J_2J_3J_4$ dont les sommets ont pour coordonnées $\pm\alpha$, $\pm\beta$, et soit T le point de coordonnées γ, δ.

Les quatre sommets A, B, C, D sont sur les droites TJ_1, TJ_2, TJ_3, TJ_4 et l'on a :

$$\frac{TA}{TJ_3} = \frac{TC}{TJ_1} = \frac{\delta\gamma}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$
$$\frac{TB}{TJ_2} = \frac{TD}{VJ_4} = \frac{\delta\gamma}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$

d'où

$$\frac{AT}{AJ_3} = \frac{CT}{CJ_1} = \frac{BT}{BJ_2} = \frac{DT}{DJ_4} = \frac{\delta\gamma}{\alpha\beta},$$

donc les diagonales du quadrilatère ABCD sont parallèles aux côtés du losange $E_1G_1E'G'$; on en déduit :

$$\frac{m}{J_1J_3} = \frac{\delta\gamma}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \qquad \frac{n}{J_2J_4} = \frac{\delta\gamma}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$
$$mn = \frac{4\delta^2\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \quad \frac{m}{n} = \frac{\delta\gamma + \alpha\beta}{\delta\gamma - \alpha\beta}.$$

On voit immédiatement sur la figure que la droite TL qui passe par le milieu M de SQ passe aussi par les milieux des diagonales AC, BD, et l'on vérifie que :

$$\frac{LH}{LK} = \frac{TH}{TK}.$$

Exercice proposé. — R et r étant les rayons de deux cercles intérieurs l'un à l'autre, de centres O et ω, et Δ la distance des centres, démontrer que si l'on a :

$$(R^2 - \Delta^2)^2 = 2r^2(R^2 + \Delta^2),$$

on peut inscrire dans le premier une infinité de quadrilatères ABCD circonscrits au second.

Le lieu des points S et Q est la polaire du point fixe I de rencontre des diagonales, qu'on déterminera par les relations :

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \omega P = \dfrac{R^2 - \Delta^2}{2\Delta} \\ OP = \dfrac{R^2 + \Delta^2}{2\Delta} \end{cases} \quad \text{et} \quad PI = \frac{r^2}{\Delta},$$

d'ailleurs $S\omega Q$ est droit.

Les périmètres et les surfaces des quadrilatères sont proportionnels à f.

Le produit des diagonales est constant, égal à $\frac{8Rr^2}{R^2 - \Delta^2}$.

26. — *Problème. Calculer les côtés d'un quadrilatère inscriptible et circonscriptible, connaissant les trois diagonales* m, n, μ.

Posons :

$$\begin{aligned} a + c &= 2x, &\quad \text{d'où} \quad a &= x + y, \\ a - c &= 2y, & b &= x - z, \\ d + b &= 2x, & c &= x - y, \\ d - b &= 2z, & d &= x + z. \end{aligned}$$

on trouve les équations :

$$2x^2 - y^2 - z^2 = mn,$$

$$\frac{x^2 + yz}{x^2 - yz} = \frac{m}{n},$$

$$\frac{(x^4 - y^2z^2)\left[(x^2 - y^2)z^2 + (x^2 - z^2)y^2\right]}{16x^2y^2z^2} = \mu^2,$$

d'où

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = \frac{2\left(\frac{m - n}{mn}\right)^2\mu^2 + 2\left(\frac{m - n}{m + n}\right)^2}{1 + \left(\frac{m - n}{mn}\right)^2\mu^2}.$$

Même problème. Autre solution. — On posera :

$$\frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta} = m, \qquad \frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta} = n,$$

$\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} = \mu$, et $\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}$ condition de circonscriptibilité.

Soit :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \frac{\delta}{\gamma}\operatorname{tg}\varphi,$$

on aura :

$$(m + n)\operatorname{tg} 2\varphi = (m - n)\operatorname{tg} 2\psi,$$

$$\frac{\mu^4(m^2 - n^2)\operatorname{tg} 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} = \frac{m^2n^2\operatorname{tg} 2\psi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}\left(0\,\frac{m + n}{m - n}\right)^2,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\psi = \sqrt{\frac{\left(\frac{mn}{m-n}\right)^4 - \mu^4}{\mu^4 - \left(\frac{m^2n^2}{m^2-n^2}\right)^2}}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{mn}{m+n}.$$

on pourra donc déterminer tous les éléments de la construction.

27. — *Problème. Construire un quadrilètre inscriptible et circonscriptible, connaissant les quatre côtés, entre lesquels on a la relation :*

$$a + c = d + b, \qquad \text{ou l'équivalente} \qquad \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}.$$

On se servira des relations ci-dessous (n° 17)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a+c}{a-c}, \qquad \frac{\delta}{\beta} = \frac{d+b}{d-b}.$$

Ces trois égalités donneront :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{bd}}{\sqrt{ac}}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a+c}{a-c}, \qquad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\sqrt{db}(d+b)}{\sqrt{ac}(d-b)}.$$

Cela étant, on prendra une longueur arbitraire pour α, et on construira β, γ, δ, ce qui fournira le moyen d'obtenir un quadrilatère semblable à celui que l'on cherche ; le reste est facile à saisir.

Autres exemples. — Déterminer les éléments d'un quadrilatère inscriptible et circonscriptible, connaissant R, m et le rayon r du cercle inscrit ; ou bien R, r et f, etc...

(*A suivre*).

EXERCICES SUR LES TRIANGLES PÉDALES

Par M. **Francesco Ferrari.**

Dans les relations citées plus loin, nous adopterons les notations suivantes :

M désigne un point quelconque du plan du triangle ABC, et α, β, γ ses coordonnées barycentriques par rapport à ABC ;

Δ représente l'aire de ce triangle ;

M_1, M_2, M_3 sont les points harmoniquement associés à M ; leurs coordonnées sont, respectivement $(-\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, -\gamma)$;
M', M'_1, M'_2, M'_3 représentent les points complémentaires, et M'', M''_1, M''_2, M''_3 les anticomplémentaires de M, M_1, M_2, M_3 ;
σ, σ_1, σ_2, σ_3 les sommes $\alpha + \beta + \gamma$, $-\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha - \beta + \gamma$, $\alpha + \beta - \gamma$;
$p(M)$,.... $ap(M)$,.... les aires (positives ou négatives (*) du triangle pédale et du triangle antipédale de M,....

1. — On trouve :

(I) $$p(M) + p(M_1) + p(M_2) + p(M_3) = 0,$$

(II) $$\frac{1}{p(M)} + \frac{1}{p(M_1)} + \frac{1}{p(M_2)} + \frac{1}{p(M_3)} = \frac{4}{\Delta},$$

(III) $$ap(M) + ap(M_1) + ap(M_2) + ap(M_3) = 0,$$

(IV) $$\frac{1}{ap(M)} + \frac{1}{ap(M_1)} + \frac{1}{ap(M_2)} + \frac{1}{ap(M_3)} = -\frac{2}{\Delta},$$

(V) $$\begin{cases} p(M) \,.\, ap(M') = \Delta^2, \\ ap(M) \,.\, p(M'') = \Delta^2, \end{cases}$$

(VI) $$ap(M') + ap(M'_1) + ap(M'_2) + ap(M'_3) = 4\Delta,$$

(VII) $$\frac{1}{ap(M')} + \frac{1}{ap(M'_1)}\;\frac{1}{ap(M'_2)} + \frac{1}{ap(M'_3)} = 0,$$

(VIII) $$p(M'') + p(M''_1) + p(M''_2) + p(M''_3) = -2\Delta.$$

(IX) $$\frac{1}{p(M'')} + \frac{1}{p(M''_1)} + \frac{1}{p(M''_2)} + \frac{1}{p(M''_3)} = 0.$$

2. — Les sommes analogues relatives à $p(M')$, $\frac{1}{p(M')}$, $ap(M'')$, $\frac{1}{ap(M'')}$ ont des expressions compliquées. La plus simple est la

---

(*) L'aire d'un triangle ABC supposé placé sur un plan horizontal est positive ou négative, selon qu'une personne, qui, par hypothèse, parcourt le périmètre du triangle dans le sens ABC placé au-dessus du plan, a toujours la surface de ce triangle à sa gauche ou à sa droite.

Par l'expression *triangle pédale d'un point* M, par rapport au triangle ABC, on désigne le triangle A'B'C', dont les sommets A', B', C' sont, respectivement, les points où les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB du triangle ABC ; et par *triangle antipédale d'un point* M, par rapport au triangle ABC, le triangle A"B"C", par rapport auquel ABC est le *triangle pédale de* M.

suivante :

$$\text{(X)}\quad \frac{1}{ap(M'')} + \frac{1}{ap(M''_1)} + \frac{1}{ap(M''_2)} + \frac{1}{ap(M''_3)} = -\frac{1}{\Delta}\left(7 + \frac{4\Sigma\alpha^4}{\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\right).$$

En particulier, si M est le barycentre G de ABC, on a

$$\frac{1}{ap(G)} + \frac{1}{ap(G''_1)} + \frac{1}{ap(G''_2)} + \frac{1}{ap(G''_3)} = -\frac{11}{\Delta},$$

et si M est le centre I du cercle inscrit à ABC,

$$\frac{1}{ap(\nu)} + \frac{1}{ap(\nu_a)} + \frac{1}{ap(\nu_b)} + \frac{1}{ap(\nu_c)} = -\frac{1}{\Delta}\left(7 + \frac{\Sigma a^4}{4\Delta^2}\right).$$

3. — Des relations analogues existent entre les carrés et les produits deux à deux de ces mêmes triangles ; les plus simples sont :

$$\text{(XI)}\quad ap^2(M) + ap^2(M_1) + ap^2(M_2) + pp^2(M_3) = \frac{64\Delta^2\alpha_z\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2},$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{1}{p(M_1)\cdot p(M_2)} + \frac{1}{p(M_2)\cdot p(M_3)} + \frac{1}{p(M_3)\cdot p(M_1)} = -\left[\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2\alpha\beta\gamma\Delta}\right]^2,$$

$$\text{(XIII)}\quad p(M''_1)\cdot p(M''_2) + p(M''_2)\cdot p(M''_3) + p(M''_3)\cdot p(M''_1) = \frac{\Delta^2\sigma^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{16\alpha^2\beta^2\gamma^2},$$

$$\text{(XIV)}\quad \frac{1}{p^2(M'')} + \frac{1}{p^2(M''_1)} + \frac{1}{p^2(M''_2)} + \frac{1}{p^2(M''_3)} = \frac{64\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\Delta^2(\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2}.$$

$$\text{(XV)}\quad ap(M'_1)\cdot ap(M'_2) + ap(M'_2)\cdot ap(M'_3) + ap(M'_3) + ap(M'_1) = -\left[\frac{\Delta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2\alpha\beta\gamma}\right]^2,$$

$$\text{(XVI)}\quad \frac{1}{ap(M_1)\cdot ap(M_2)} + \frac{1}{ap(M_2)\cdot ap(M_3)} + \frac{1}{ap(M_3)\cdot ap(M_1)} = \frac{\sigma^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{16\Delta^2\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

En particulier, si M est le point G, on a :

$$p(G''_1)\cdot p(G''_2) + p(G''_2)\cdot p(G''_3) + p(G''_3)\cdot p(G''_1) = \frac{27\Delta^2}{16},$$

$$\frac{1}{p^2(G)} + \frac{1}{p^2(G''_1)} + \frac{1}{p_2(G''_2)} + \frac{1}{p^2(G''_3)} = \frac{64}{3\Delta^2};$$

et, si M est au point I,

$$ap^2(\mathrm{I}) + ap^2(\mathrm{I}_1) + ap^2(\mathrm{I}_2) + ap^2(\mathrm{I}_3) = \frac{a^2b^2c^2(a^2b^2c^2)}{4\Delta^2},$$

$$\frac{1}{p(\mathrm{I}_1)\cdot p(\mathrm{I}_2)} + \frac{1}{p(\mathrm{I}_2)\cdot p(\mathrm{I}_3)} + \frac{1}{p(\mathrm{I}_3)\cdot p(\mathrm{I}_1)} = -\left(\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc\Delta}\right)^2$$

$$p(\nu_a)\cdot p(\nu_b) + p(\nu_b)\cdot p(\nu_c) + p(\nu_c)\cdot p(\nu_a)\,(^*) = \frac{\Delta^4(a+b+c)^2}{a^2b^2c^2} = \left(\frac{\Delta^2}{2\mathrm{R}r}\right)$$

$$p^2(\nu) + p^2(\nu_a) + p^2(\nu_b) + p^2(\nu_c) = \frac{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta^6},$$

$$ap(\mathrm{I}'_1)\,.\,ap(\mathrm{I}'_2) + ap(\mathrm{I}'_2) + ap(\mathrm{I}'_3) + ap(\mathrm{I}'_3)\,.\,ap(\mathrm{I}'_1)$$
$$= -\left(\frac{\Delta(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{2abc}\right)^2,$$

$$\frac{1}{ap(\mathrm{I}_1).ap(\mathrm{I}_2)} + \frac{1}{ap(\mathrm{I}_2).ap(\mathrm{I}_3)} + \frac{1}{ap(\mathrm{I}_3).ap(\mathrm{I}_1)} = \frac{(a+b+c)^2 =}{a^2b^2c^2}\frac{1}{(2\mathrm{R}r)^2}.$$

4. — Les relations (VI), (VII), (VIII), (IX), (XIV), (XV), (XVI) dérivent immédiatement de (II), (I), (IV), (III), (XI), (XII), (XIII) à l'aide de V. Les autres se déduisent des formules connues par des calculs qui n'offrent d'autres difficultés que certaines longueurs,

$$p(\mathrm{M}) = \frac{2\alpha\beta\gamma\Delta}{(\alpha+\beta)\,(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)},\quad ap(\mathrm{M}) = \frac{4\alpha\beta\gamma\Delta}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}.$$

SUR LES FIGURES SEMBLABLES

Par F. J.

A diverses reprises, le *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* a traité du déplacement des figures égales et des figures semblables (**), mais il y a lieu, croyons-nous, de signaler diverses propriétés de ces figures.

(*) ν, ν_a, ν_b, ν_c désignent les points du groupe de Nagel. (Voyez, Rouché, *Géom.* p. 468).

(**) 1891. J. M. S. Page 193. *Sur les centres de similitude*, par A. Poulain. — 1894. J. M. E. Page 3. *Sur les centres de rotation*, par A. Poulain. — Page 196. *Piège cinématique*, par G. Tarry. — Page 241. *Note sur les figures semblables*, par Dorlet. — 1895. J. M. S. Pages 12 et 159. *Sur les figures semblables*, par F. J. — J. M. E. Page 79. *Sur le déplacement des figures semblables*, par G. Tarry. Page 101. *Sur les axes de rotation*, par G. Tarry. — Page 195. *Détermination du centre de similitude de deux figures directement semblables*, par F. J. — 1896. J. M. E. Pages 191 et 192. *Questions* 753, 754, 755, par G. Tarry.

FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES

Théorème. — Lorsqu'on a deux figures directement semblables dans un même plan, et qu'on divise dans le même rapport en A_2, B_2, C_2..., les droites AA_1, BB_1, CC_1, etc., qui joignent deux à deux les points homologues, on obtient une figure $A_2B_2C_2$... semblable aux deux premières (*).

On peut dire : *Deux figures directement semblables, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme étant deux positions d'une même figure mobile, qui varie de grandeur, mais en restant semblable à elle-même, pendant que chacun de ses points décrit une trajectoire rectiligne* (**).

Les figures planes homothétiques ne sont qu'un cas particulier de la question précédente.

Théorème. — Si trois couples de points homologues A,A_1, $B.B_1$, C,C_1 de deux figures directement semblables à trois dimensions F,F_1 sont dans un même plan P, on peut considérer les deux figures données comme étant deux positions d'une même figure mobile, qui varie de grandeur, mais en restant semblable à elle-même, pendant que chacun de ses points contenus dans le plan P, décrit une droite sur ce plan, tandis que tout point extérieur, D par exemple, décrit un arc d'hyperbole DD_1 dont le plan est perpendiculaire au plan P, et dont la projection dd_1 est l'axe non transverse de la courbe.

FIGURES INVERSEMENT SEMBLABLES

Lorsqu'on projette sur une parallèle aux bissectrices intérieures, les points homologues de deux figures inversement semblables, on obtient deux ponctuelles (***) directement semblables ; tandis

(*) Le théorème est connu : les N. A. M. viennent de le rappeler, 1896, page 369.

(**) Nous ne considérons pas de la *Spirale logarithmique* considérée comme trajectoire de chaque point, puisque nous en avons parlé ailleurs : (J. M. S. 1895 ; pages 12 et 159).

(***) *Ponctuelle* est employé dans le sens indiqué par CREMONA, dans sa *Géométrie projective*.

Deux ponctuelles directement ou inversement semblables, sur une même droite, admettent un *point double*.

que sur une parallèle aux bissectrices extérieures, on a deux ponctuelles inversement semblables.

Théorème. — 1° Le lieu des points qui divisent les droites de jonction des couples de points homologues de deux figures inversement semblables, en segments additifs dans le rapport de similitude, est une droite parallèle aux bissectrices des angles formés par les côtés homologues.

Cette droite peut être nommée : *Droite des divisions proportionnelles intérieures.*

2° Deux figures inversement semblables, situées dans un même plan, admettent aussi une *droite des divisions proportionnelles extérieures.*

3° Les deux droites des divisions proportionnelles sont orthogonales ; leur point de concours est le *point double* des deux figures inversement semblables.

4° *Cas particulier.* — Deux figures inversement égales n'admettent à distance finie, qu'une seule droite des divisions proportionnelles : c'est la droite intérieure ; on peut la nommer *droite des milieux* (*).

La droite extérieure passe à l'infini et il en est de même du point double.

5° *Application à deux circonférences situées dans un même plan.*

On sait que le lieu des points dont les distances δ et δ' aux centres O et O', sont dans le rapport des rayons r et r', est le cercle qui a pour diamètre le segment IE déterminé par le centre intérieur I d'homothétie et par le centre extérieur E ; or, le cercle IE est le lieu des points doubles des circonférences O et O', considérées comme *directement* ou comme *inversement* semblables (**), car les deux droites orthogonales des divisions proportionnelles (3) passent respectivement par les centres d'homothétie I, E.

(*) L'appellation *droite des milieux* est due à CHASLES, dans le cas de deux ponctuelles égales, sur deux droites différentes ; il convient de garder ce même nom, dans le cas plus général de deux figures inversement égales.

(**) La première partie de la proposition, pour *directement* semblables, est bien connue ; mais il n'en est pas de même, croyons-nous, de la seconde.

FIGURES PLANES SEMBLABLES, NON SITUÉES DANS UN MÊME PLAN

L'étude de deux figures planes semblables situées dans des plans parallèles, se ramène facilement à celle de deux figures semblables situées dans le même plan.

Théorème. — 1° Lorsque les figures sont directement semblables, et qu'on joint deux à deux les couples A, A_1 ; B, B_1 ; C, C_1... des points homologues, tout plan parallèle aux plans donnés, détermine une figure $A_2B_2C_2$... directement semblable aux proposées (*).

2° Le lieu des points A_2, B_2, C_2... qui divisent AA_1, BB_1, CC_1... dans le rapport de similitude de deux figures ABC..., $A_1B_1C_1$ inversement semblables, situées dans des plans parallèles, est une droite, soit que les segments soient additifs ou soustractifs. Les deux droites sont orthogonales.

3° Deux figures semblables ABC..., $A_1B_1C_1$... situés dans deux plans concourants P et P_1 participent à la fois, aux propriétés des figures d'un même plan, *directement* et *inversement* semblables; ainsi :

Les points A_2, B_2, C_2... qui divisent AA_1, BB_1, CC_1... en segments additifs dans le rapport de similitude, sont dans un même plan Q ; en projetant A_2, B_2... sur les plans P et P_1 par des droites parallèles à l'une des bissectrices de l'angle plan qui mesure le dièdre PP_1, on obtient des projections directement semblables aux figures données.

De même pour les points qui divisent AA_1, BB_1... en segments soustractifs.

Soit R le plan qui contient les points de division ; les traces q, r des plans Q et R sur P sont orthogonales entre elles ; il en est de même des traces q_1 et r_1, sur P_1. Les plans Q et R se coupent suivant une droite parallèle aux projetantes qui donnent des figures directement semblables *abc* et $A_1B_1C_1$.

Pour démontrer cet intéressant théorème, il suffit de projeter ABC... sur le plan P_1, à l'aide de parallèles aux bissectrices b et b' de l'angle plan qui mesure le dièdre PP_1.

(*) Question connue ; voir N. A. M., 1896, page 369.

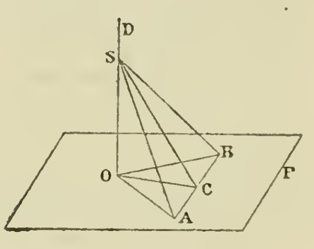
L'une des projections *abc*... par exemple, est directement semblable à $A_1B_1C_1$..., tandis que l'autre projection *a'b'c'*... est inversement semblable à la même figure $A_1B_1C_1$... Remarque analogue pour les projections de $A_1B_1C_1$... sur le plan P.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Dubouis**, professeur au collège de Barcelonnette

Théorème. — Si une droite est perpendiculaire à deux droites tracées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à toute autre droite tracée par son pied dans le même plan.

Soient O le pied de la droite OD et OA, OB deux droites du plan, perpendiculaires à OD. Soit OC une troisième droite menée par O dans le plan.



Coupons OA, OB et OC par une transversale ABC. Il suffit de montrer que, si S est un point quelconque de OD, la longueur CS ne peut pas être égale à CO.

En effet, s'il en était ainsi, les deux triangles ACS et ACO dans lesquels on aurait

$$CS = CO \qquad AC = AC \qquad AS > AO,$$

donneraient :

$$ACS > ACO.$$

Pour la même raison on aurait

$$BCS > BCO.$$

Donc

$$ACS + BCS > ACO + BCO,$$

inégalité visiblement impossible.

NOTICE HISTORIQUE
SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE
Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 138)

G. DE SAINT-VINCENT

Bien que dans ses démonstrations, Grégoire de Saint-Vincent emploie la méthode d'exhaustion, il peut être considéré comme un de ceux qui ont le plus contribué au progrès de la méthode des indivisibles, et même comme un de ses promoteurs. Si son célèbre *Opus geometricum* n'a été publié qu'en 1647, les théorèmes qu'il contient avaient été divulgués en partie dans les leçons qu'il professait à Rome, à Prague et en Belgique depuis plus de vingt-cinq ans. Ses découvertes, plus encore que celles de Cavalieri, procèdent du théorème de Kepler et de la méthode de transformations de figures.

Dans le septième livre de son ouvrage, l'auteur développe une méthode très féconde de cubature, qu'il appelle *Ductus plani in planum* ; et dans le neuvième, il applique cette méthode à la mesure de différents solides, entre autres à celle des *onglets*, qui n'avait pas encore été donnée.

OPUS GEOM. — LIB. VII

Définition. — Soient deux figures planes A, B, de même hauteur (*fig.* 41). Menons à égale hauteur les droites GH, KL, puis relevons GH en K perpendiculairement au plan de B et achevons le rectangle dont ces deux droites ainsi placées sont deux côtés adjacents. En répétant cette construction pour toutes les droites de A et de B parallèles à la base, nous obtiendrons un certain solide. Ainsi si A est un cercle et B un rectangle, le solide obtenu sera un cylindre.

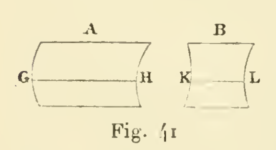


Fig. 41

On désignera cette opération par l'expression A *ductum in* B ou GH *ductum in* KL.

Si les deux figures sont identiques, on dira A *ductum in se* (*).

Le plus souvent, comme dans la (*fig.* 42), les deux surfaces sont terminées par une droite perpendiculaire aux bases, comme AB : on relève alors l'une des deux figures, comme on fait en géométrie descriptive, la droite AB faisant l'office de ligne de terre.

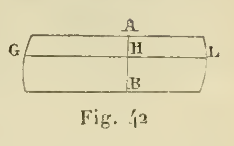


Fig. 42

I. — *Le carré ductum in se produit un cube* (*fig.* 43).

II. — *Si l'un de ces carrés est remplacé par un triangle rectangle, le résultat est un prisme triangulaire* (*fig.* 44).

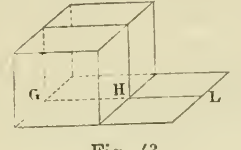


Fig. 43

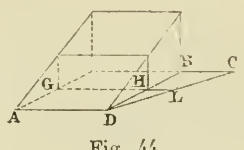


Fig. 44

III. IV. V. — *Le triangle rectangle ductum in se produit une pyramide à base carrée* (*fig.* 45). *Si l'un des triangles est retourné* (*fig.* 46) *on obtient une pyramide triangulaire qui est la moitié de la première.*

XVI à XXVII. — Etude des corps produits par le cercle (*fig.* 47)

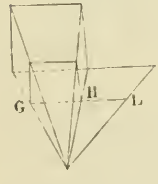


Fig. 45

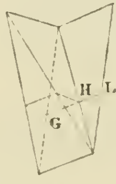


Fig. 46

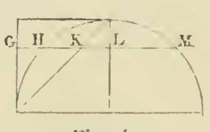


Fig. 47

HL *ductum in se*, GH *in se*, GH *in* GL, GH *in* HL, HM *in se*, GK *in* HM.

(*) G. de Saint-Vincent lui-même et Pascal ont remplacé *ductum in* par *multiplié par*; Quetelet le traduit par *projeté sur*; M. Max. Marie a créé l'expression *duit sur*. Aucun de ces mots n'est exact ou complet, il faudrait une expression qui pût se rendre par *redressé et promené sur*, comme *ductérigé*, mais nous avons reculé devant ce néologisme dans un travail historique.

XL. — *Considérons la surface comprise entre une courbe quelconque* DB, *concave ou convexe, et un angle droit donné* A *ou* C (*fig.* 48) : *on peut toujours lui inscrire une série de rectangles dont la surface en diffère moins que d'une quantité donnée quelconque* α. Divisons AB en un certain nombre de parties égales telles que le rectangle KC soit plus petit que α et menons par les points de division des parallèles, qui rencontrent la courbe en G, F, E,.... : le problème sera résolu. En effet, la somme des rectangles OL, PR, QS,... KT est égale au rectangle KC, et par conséquent plus petite que α. Or, cette somme est elle-même supérieure à celle des triangles mixtilignes DOG, GPF,... donc *a fortiori* le triangle mixtiligne DBA diffère de la surface OGPFQEK de moins que α. De même le triangle mixtiligne DBC diffère de la surface LGRFSETC de moins que α.

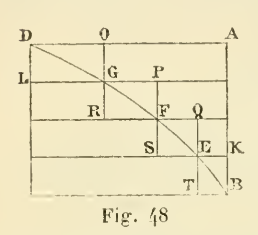


Fig. 48

XLVI. — *Soient quatre surfaces planes d'égales hauteurs* AB (*fig.* 49). *Si pour une transversale perpendiculaire quelconque* GL, *on a* $\frac{GI}{KI} = \frac{IL}{HI}$, *le solide provenant de* GI *ductum in* HI *est égal à celui de* KI *ductum in* IL. Ce théorème est un corollaire de celui que nous avons désigné sous le nom de Kepler. L'auteur le démontre explicitement comme nous l'indiquons par les théorèmes d'Archimède et d'Eudoxe (*).

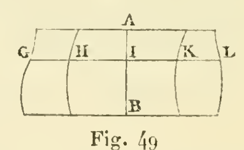


Fig. 49

XLVII. — *Par les extrémités du diamètre* AB (*fig.* 50) *menons les tangentes* AC, BD *égales à ce même diamètre, et tirons* BC, AD, *on aura*

demi-cercle *ductum in se* = *tri.* ACB *ductum in tri* ABD

On a en effet

$$GI.IK = BI.IA = IH^2.$$

(*) Il lui échappe dans cette démonstration le mot *infini*, mais il a soin de le traduire par l'expression *en nombre quelconque :* « ducantur infinitæ (hoc est quot cumque) æquidistantes,... »

Le premier solide est représenté (*fig.* 51). Il est égal, d'après ce qui précède, à un tétraèdre facile à mesurer. Nous le retrouverons plus loin (*).

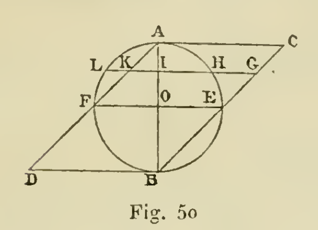


Fig. 50

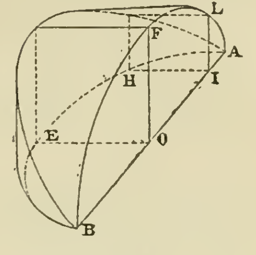


Fig. 51

XLVIII à LXX. — Mesures d'autres corps déduits du cercle, et

Fig. 52

Fig. 53

Fig. 54

Fig. 55

Fig. 56

Fig. 57

Fig. 58

Fig. 59

Fig. 60

(*) Il va sans dire que la tranche III *ductum in se* comprise entre deux plans parallèles quelconques est égale à la tranche correspondante du tétraèdre. Cette remarque s'applique à tout ce qui suit.

indiqués par les relations suivantes :

(*fig.*52) $IG.IH = IK.IL = \overline{IR}^2$, $PQ.HK = \overline{QR}^2$, $\overline{IR}^2 + \overline{IK}^2 = IK.IM$

(*fig.*53) $\overline{GK}^2 = GH.GL$, $GI.IK = HI.IL$

(*fig.* 54) $GI.IL = \overline{AE}^2$

(*fig.* 55) $HI.IM = GI.IL$, $HL.LM = GH.IL$, $GH.HL = HI.DE$

LXX à CLXVIII. — Même chose pour le segment de parabole dont la flèche est égale à la demi corde

(*fig.*56) $GH.HL = KI^2$, $GI^2 = HI^2 + KI^2$, et autres semblables

(*fig.*57) $GI.GK = GH.GL$, $GK.GL = GI.AB$, $GK.KL = HI.AB$

(*fig.*58) $GH.LM = KL.NP$, $KL.PQ = GL.MP$, $GK.LP = GL.MP$,

(*fig.*59,60) $GL.LP = KL.AB$, $FG.LP = GL.PQ$, $GP^2 = AB^2 + KL.AB$;

relations analogues.

Certaines de ces relations s'étendent à une parabole quelconque.

On a ainsi la mesure d'un grand nombre de nouveaux solides, parmi lesquels plusieurs sont remarquables (*).

(*A suivre*).

EXERCICES

Par M. **Boutin**

440. — *Trouver tous les nombres tels que leur carré plus leur cube soit un carré, et que le double de leur cube soit également un carré?*

On doit avoir simultanément :

$$x^3 + x^2 = y^2, \qquad 2x^3 = z^2;$$

par suite $$x + 1 = K^2, \qquad x = 2p^2,$$

d'où $$2p^2 + 1 = K^2.$$

C'est l'équation de Pell, bien connue, qui donne :

$p_0 = 0$ $p_1 = 2$ $p_2 = 12$ $p_3 = 70$ $\ldots . p_n = 6p_{n-1} - p_{n-2}$,

d'où

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 8, \quad x_2 = 288, \quad x_3 = 9\,800 \ldots .$$

$$x_n = 36x_{n-1} + x_{n-2} - 12\sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}.$$

(***) L'hyperbole fournirait la matière d'un grand nombre d'études du même genre.

441. — *On ne saurait trouver quatre entiers en progression arithmétique et tels que la somme de leurs quatrièmes puissances, soit une quatrième puissance* (*).

442. — *On ne saurait trouver : ni* 6, *ni* 9, *ni* 10, *ni* 11 *entiers consécutifs, tels que la somme de leurs quatrièmes puissances soit une quatrième puissance.*

443. — *On ne saurait trouver six entiers en progression arithmétique de raison* r (r *étant de la forme* : $2^\alpha 3^\beta$) *tels que la somme de leurs quatrièmes puissances soit une quatrième puissance.*

444. — *La somme des puissances* n^{es} *de dix entiers consécutifs quelconques est toujours terminée par* 5 ; *sauf si* $n = 4\mu$, *alors cette somme est terminée par* 3.

445. — *Les nombres étant écrits dans le système de base* p, (p *premier*) *la somme des puissances* n^{es} *de* p *nombres consécutifs est toujours terminée par zéro, sauf si* n *est de la forme* : $(p - 1)y$; *alors cette même somme est terminée par* $p - 1$.

Il suffit de démontrer le théorème pour les $p - 1$ premiers nombres et les $p - 1$ premières puissances, ce qui se fait aisément.

446. — *Le chiffre des dizaines de* 11^n, 13^n, 15^n, 17^n, 19^n, *est de la même parité que* n.

447. — α *étant un entier quelconque,*

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \alpha^{n+3},$$

est terminé par 0 *ou* 4, *suivant que* α *n'est pas ou est de la forme* $5m + 1$.

EXERCICES

Par M. **Bernès**

I. — Si β, γ sont les projections de B, C sur la bissectrice de l'angle A du triangle ABC, les parallèles à AB, AC menées par β, γ se coupent sur la symédiane issue de A. — Même propriété pour la bissectrice extérieure.

(*) Cet énoncé supprime la restriction de l'Exercice 309.

II. — Si, P étant un point quelconque du cercle ABC, les droites AP, BP, CP rencontrent BC, CA, AB en α, β, γ, que $\alpha\gamma$ rencontre AC en β', et que $\alpha\beta$ rencontre AB en γ' ; la droite $\beta'\gamma'$ passe par le point de Lemoine.

III. — Sur le côté BC du triangle ABC on porte $CB_1 = a$ à la suite de BC, et $BC_1 = a$ à la suite de CB. Si AA_1 est la corde du cercle ABC parallèle à BC, que B_1A_1 rencontre AC en β et que C_1A_1 rencontre AB en γ, les deux points β, γ sont en ligne droite avec le milieu de BC et avec le point de Lemoine. Ces points β, γ sont aussi sur les parallèles à BC menées par les points où la médiatrice de BC rencontre AB, AC.

IV. — Sur la droite qui joint les milieux de AB, AC on prend un point quelconque M. Si les droites qui joignent B et C au point M' isogonal de M rencontrent AC, AB en β, γ, la droite $\beta\gamma$ passe par le point de Lemoine.

V. — Si par le point de Lemoine du triangle ABC, on mène une parallèle à BC qui rencontre AB, AC en β, γ et que β', γ' soient les conjugués harmoniques de β, γ relativement à AB, AC, les deux droites $C\beta'$, $B\gamma'$ se coupent au point où la médiane, issue de A, rencontre le cercle ABC. Si L est ce point et que A' soit la symétrique de A relativement à L, les droites $B\gamma$, $C\beta$ se coupent sur le cercle BCA'.

VI. — E, F étant deux points quelconques pris l'un sur le côté AC, l'autre sur le côté AB du triangle ABC, la droite menée par C qui divise BE dans le rapport $-\dfrac{a^2}{b.\mathrm{CE}}$ et la droite menée par B qui divise CF dans le rapport $-\dfrac{a^2}{c.\mathrm{BF}}$ se coupent au point de Lemoine. Noter le cas particulier à $\mathrm{CE} = a$ et $\mathrm{BF} = a$, et le cas particulier où $\mathrm{CE} = \dfrac{a^2}{b}$, $\mathrm{BF} = \dfrac{a^2}{c}$. (Les sens positifs de CE, BF sont CA, BA). (*A suivre*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE. BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR

LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 145)

CONIQUES BITANGENTES A DEUX CERCLES

60. — Il ne s'agit plus ici que des coniques pour lesquelles les deux cercles bitangents sont d'espèces différentes. Leurs centres appartiennent à la circonférence qui a pour diamètre la ligne des centres des deux cercles.

Pour l'une quelconque de ces coniques, le point d'intersection des deux droites des contacts est l'un des nœuds des deux cercles par rapport à leur axe radical, et les saillants se trouvent, avec l'autre nœud, sur une même perpendiculaire à la ligne des centres.

Soit Ω (*fig.* 35) le point de rencontre des droites des contacts de l'une des coniques avec les deux cercles. Ce point doit avoir la même polaire dans chaque cercle que dans la conique; il aura donc la même polaire dans les deux cercles. Ainsi, il se trouvera sur la droite qui joint leurs centres H, H'; de plus, Ω_1 étant l'intersection de cette droite avec la polaire commune, et r, r' désignant les deux rayons, on aura

$$(1)\qquad H\Omega . H\Omega_1 = r^2, \qquad H'\Omega . H'\Omega_1 = r'^2.$$

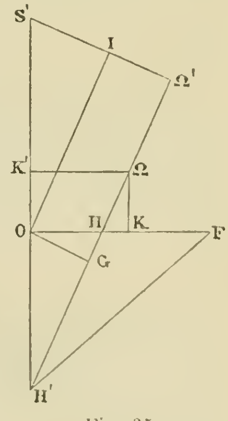


Fig. 35

D'après cela, la circonférence décrite sur $\Omega\Omega_1$ comme diamètre, couperait orthogonalement les deux cercles; le milieu de $\Omega\Omega_1$ appartient donc à leur axe radical, et leurs nœuds, par rapport à cet axe, sont Ω et Ω_1.

Quant aux saillants, chacun se trouve sur la polaire, par rapport à la conique, du point de rencontre Ω des droites des contacts; or, on vient de voir que cette polaire est la perpendiculaire élevée en Ω_1 sur HH'.

Il y a lieu de se demander si, pour toutes les coniques bitan-

gentes aux deux cercles, c'est le même nœud qui sert de point de concours aux droites des contacts, ou si ce point de concours se trouve, pour les unes en Ω, et, pour les autres, en Ω_1. Supposons les deux cercles extérieurs l'un à l'autre, et considérons deux coniques particulières formées, la première par une des tangentes extérieures aux deux cercles et une des tangentes intérieures, la seconde par la même tangente extérieure et l'autre tangente intérieure. Pour la première, le point de rencontre des droites des contacts sera en dedans de l'un des cercles ; pour la seconde, il sera en dedans de l'autre cercle ; les deux points ne sauraient donc coïncider. De là nous concluons qu'il y a bien deux groupes de coniques pour l'un desquels les droites des contacts partent du nœud Ω, tandis que, pour l'autre, elles partent du nœud Ω_1.

Dans les trois paragraphes suivants, nous n'envisagerons de chaque groupe que les coniques dont l'axe focal passe par le centre du même cercle, H par exemple ; nous verrons ensuite comment elles se trouvent liées à celles dont l'axe focal passe par le centre de l'autre cercle.

61. — *Les coniques d'un même groupe sont semblables entre elles.*

Considérons une conique du groupe (Ω) dont l'axe focal soit OH (*fig.* 35) ; abaissons, sur OH, OH', les perpendiculaires ΩK, ΩK'. Par suite de la similitude des triangles OHH', HKΩ, H'K'Ω, les lignes H'Ω, HΩ, HH' sont proportionnelles aux lignes OK, HK, OH ; celles-ci le sont à a^2, b^2, c^2 [22] ; on a donc

$$(2) \qquad \frac{a^2}{H'\Omega} = \frac{b^2}{H\Omega} = \frac{c^2}{HH'},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Si l'on joint Ω à l'un des points de rencontre de deux coniques du groupe, on obtiendra une ligne qui sera bissectrice de l'angle formé par les droites des contacts de chaque cercle avec les deux coniques [58]. L'un des couples de sécantes communes à ces deux coniques sera donc orthogonal et aura son sommet en Ω.

Pour une conique du groupe (Ω_1) dont l'axe focal passerait aussi par H, on aurait

$$(3) \qquad \frac{a_1^2}{H'\Omega_1} = \frac{b_1^2}{H\Omega_1} = \frac{c_1^2}{HH'}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités (2) et (3), en ayant égard aux relations (1), il viendra

$$\frac{aa_1}{r'} = \frac{bb_1}{r} = \frac{cc_1}{d},$$

d désignant la distance des centres des deux cercles.

(*A suivre*).

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

(*Suite et fin*, v. 1897; p. 148).

PARTAGE DE LA CIRCONFÉRENCE

On sait inscrire dans le cercle, avec la règle et le compas, des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17... côtés. On peut aussi combiner entre elles ces diverses divisions de la circonférence, de manière à réaliser d'autres divisions. C'est ainsi, par exemple que le pentédécagone se déduit de l'hexagone et du décagone par la relation

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}.$$

Proposons-nous de diviser la circonférence en soixante parties égales. On y parviendra en prenant le quart du quinzième. On peut aussi y arriver en combinant d'autres fractions de la circonférence entière. Décomposons 60 en deux facteurs premiers entre eux, 12×5, et posons

$$\frac{1}{60} = \frac{x}{5} + \frac{y}{12},$$

x et y représentant des nombres entiers. On en déduit

$$12x + 5y = 1,$$

équation dont la solution générale est, en appelant t un nombre entier quelconques positif ou négatif,

$$x = 5t - 2,$$
$$y = 5 - 12t.$$

Nous aurons la solution qui admet les moindres nombres en

valeur absolue en posant $t = 0$. Il viendra

$$x = -2, \quad y = 5,$$

et l'on a

$$\frac{1}{60} = \frac{5}{12} - \frac{2}{5}.$$

Mais on peut aussi décomposer 12 en deux facteurs premiers entre eux, $12 = 3 \times 4$, et poser,

$$\frac{5}{12} = \frac{z}{3} + \frac{u}{4}, \quad \text{ou bien} \quad 4z + 3u = 5.$$

On trouvera pour solution générale

$$z = 3t' - 1,$$
$$u = 3 - 4t',$$

et la solution la plus simple, pour $t' = 0$, est $z = -1$, $u = 3$, c'est-à-dire

$$\frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3},$$

ce qui conduit à poser en définitive

$$\frac{1}{60} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}.$$

En partant de la décomposition de 60 en ses facteurs 15 et 4, puis en décomposant de même 15 en deux facteurs 3 et 5, on arriverait à une autre décomposition :

$$\frac{1}{60} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.$$

On obtiendra donc le côté du polygone régulier de 60 côtés en combinant par voie d'addition algébrique les arcs sous-tendus par les côtés du triangle équilatéral, du carré et du pentagone régulier.

La division de la circonférence en 60 parties égales est utile pour l'inscription des minutes sur le cadran d'une horloge. Examinons comment l'opération devrait être dirigée pour obtenir l'arc d'un degré, ou pour inscrire dans le cercle le polygone régulier de 360 côtés. On décomposera la fraction $\frac{1}{360}$ en fractions simples, ayant pour dénominateurs les facteurs de 360, premiers

entre eux deux à deux :

$$360 = 5 \times 8 \times 9,$$

et on trouvera par l'analyse indéterminée, en adoptant la plus simple solution,

$$\frac{1}{360} = \frac{3}{5} - \frac{3}{8} - \frac{2}{9}.$$

On sait diviser géométriquement la circonférence en cinq parties égales et en huit parties égales, mais on ne peut la diviser en neuf. On peut, il est vrai, la partager en trois, et il restera à subdiviser en trois parties égales l'arc sous-tendu par le côté du triangle équilatéral. Ici la solution peut être fournie par l'arithmétique binaire, en appliquant le développement

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots$$
$$= 0{,}01010101\ldots;$$

ce complément de la solution est seul approximatif.

Soit proposé de partager une circonférence en parties proportionnelles à des nombres entiers donnés p, q, r,....

Soit $S = p + q + r + \ldots$ la somme des nombres donnés. Le problème est ramené à partager la circonférence en S parties égales.

Si le nombre S rentre dans ceux pour lesquels le partage du cercle puisse se faire géométriquement, la question est immédiatement résolue. Supposons, par exemple, qu'on demande de partager le cercle en trois parties proportionnelles aux nombres 3, 4 et 5. La somme S est égale à 12, et il suffira d'inscrire dans le cercle le dodécagone régulier. La solution sera donnée par les arcs qui sont sous-tendus respectivement par les côtés du carré inscrit, du triangle équilatéral, et du dodécagone régulier étoilé.

Si S n'est pas le nombre de côtés d'un polygone régulier inscriptible, on pourra toujours trouver un multiplicateur entier x tel, que le produit Sx soit égal à $2^\mu - 1$, μ étant un exposant entier qui reste à déterminer. Puis on substituera à la fraction $\frac{1}{S}$ la fraction $\frac{x}{2^\mu - 1}$; elle conduit à un développement binaire, qu'on peut arrêter à un terme suffisamment petit, à titre d'approximation.

Prenons pour exemple le partage d'une circonférence en trois parties proportionnelles aux nombres 6, 7 et 8. La somme de ces nombres est $21 = 3 \times 7$. Pour trouver une puissance de 2 qui, divisée par 3 et par 7, laisse pour reste l'unité, il faut aller jusqu'à $2^6 = 64$; car 63 est divisible à la fois par 3 et par 7. Nous poserons donc

$$\frac{1}{21} = \frac{3}{2^6 - 1} = \frac{3 \times \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2^6}} = 3\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{18}} + \ldots\right)$$

$$= 0{,}000\bar{1}0\bar{1}000\bar{1}0\bar{1}\ldots..,$$

fraction qui montre comment doivent être dirigées les bissections. Voilà la méthode directe. Mais dans le cas particulier observons que les parties cherchées sont $\frac{6}{21}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{8}{21}$, et que la seconde $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Par conséquent, la seconde des parties cherchées est l'arc sous-tendu par le côté du triangle équilatéral. Cette partie est connue exactement d'avance. Il reste alors à partager proportionnellement aux nombres 6 et 8 les deux tiers de la circonférence. Ces nombres donnés sont proportionnels à 3 et 4, dont la somme est 7. Il suffit donc de diviser l'arc en sept parties égales, ce qui se fera par l'application du développement binaire

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \ldots = 0{,}001001001\ldots$$

prolongé autant qu'on le voudra.

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897; p. 151).

28. — *Lieux géométriques.*

Si SLQT étant fixe, on fait varier α et β, β étant une fonction connue de α, les quatre sommets du rectangle $J_1J_2J_3J_4$ se déplace-

ront sur des courbes déterminées, et les quatre sommets du quadrilatère ABCD, sur des courbes corrélatives.

Du n° 17 on tirera :

Pour le point C

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta = \dfrac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ (\gamma - x)\beta - (\delta - y)\alpha = \gamma y - \delta x, \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\delta x}{\delta - y}, \quad \beta = \frac{\gamma y}{\gamma - x};$$

pour le point A

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta = \dfrac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ (\gamma - x)\beta - (\delta - y)\alpha = \delta x - \gamma y, \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{\delta x}{\delta - y}, \quad \beta = -\frac{\gamma y}{\gamma - x};$$

pour le point B

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta = -\dfrac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ (\gamma - x)\beta + (\delta - y)\alpha = \gamma y - \delta x, \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{\delta x}{\delta - y}, \quad \beta = \frac{\gamma y}{\gamma - x};$$

pour le point D

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta = -\dfrac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ (\gamma - x)\beta + (\delta - y)\alpha = \delta x - \gamma y, \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\delta x}{\delta - y}, \quad \beta = -\frac{\gamma y}{\gamma - x};$$

aux solutions conjointes qui donnent α et β en fonction de y et x, on ajoutera

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

φ étant une fonction connue, et l'on aura immédiatement l'équation du lieu, savoir

$$\pm \frac{\gamma y}{\gamma - x} = \varphi\left(\pm \frac{\delta x}{\delta - y}\right).$$

Exemple : le point J_1 décrit la droite :

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 1,$$

les lieux décrits respectivement par C, A, B, D auront pour équa-

tions :

(C) $A\gamma y^2 + ABxy + B\delta x^2 - A\gamma(B+\delta)y - B\delta(A+\gamma)x + AB\delta\gamma = 0,$
(A) $A\gamma y^2 - ABxy + B\delta x^2 + A\gamma(B-\delta)y + B\delta(A-\gamma)x - AB\delta\gamma = 0,$
(B) $A\gamma y^2 + ABxy - B\delta x^2 - A\gamma(B+\delta)y - B\delta(A-\gamma)x + AB\delta\gamma = 0,$
(D) $A\gamma y^2 - ABxy - B\delta x^2 + A\gamma(B-\delta)y + B\delta(A+\gamma)x - AB\delta\gamma = 0.$

Autre exemple : si

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2,$$

ρ étant une constante, les quatre points A, B, C, D parcourent les différents arcs d'une même courbe dont l'équation est

$$\frac{\delta^2 x^2}{(\delta - y)^2} + \frac{\gamma^2 y^2}{(\gamma - x)^2} = \rho^2,$$

c'est ce qui arrive en général pour toute fonction de α et β renfermant des puissances paires de ces coordonnées.

Nota. — On vérifiera que si l'un des sommets se trouve sur le cercle de centre O et de rayon R, les trois autres sommets sont sur le même cercle.

Récriproquement, si l'on donne la courbe parcourue par l'un des sommets du qudrilatère, on trouvera celle engendrée par l'un des points J.

Exemple. — Pour que C soit assujetti à parcourir la ligne droite

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1,$$

il faut que les coordonnées α, β du point J_1 satisfassent à l'équation $(AB - A\delta - B\gamma)\alpha\beta + A\delta\gamma\beta + B\delta\gamma\alpha - AB\delta\gamma = 0.$

Autre exemple : soit

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

on aura :

$$\gamma^2\alpha^2(\delta - \beta)^2 + \delta^2\beta^2(\gamma - \alpha)^2 = \rho^2(\delta\gamma - \alpha\beta)^2.$$

On peut de même trouver les lieux de points autres que les sommets et qui se rattachent au quadrilatère.

Par exemple les coordonnées du centre O étant :

$$x = \frac{\gamma\beta^2(\alpha^2 + \delta^2)}{\alpha^2\beta^2 - \delta^2\gamma^2}, \quad y = \frac{\delta\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)}{\alpha^2\beta^2 - \delta^2\gamma^2},$$

on en déduit :

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{\delta^2\gamma^2 xy}{(\delta - y)(\gamma - x)}, \quad \text{et} \quad \delta(\delta - y)\beta^2 - \gamma(\gamma - x)\alpha^2 = \delta\gamma(\gamma y - \delta x),$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{\delta\gamma y}{x - \gamma},$$

$$\beta^2 = \frac{\delta\gamma x}{y - \delta},$$

de sorte que si, par exemple, on donne :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2,$$

le lieu du point O sera représenté par

$$y^2 - \frac{\rho^2}{\delta\gamma} xy + x^2 + \frac{\rho^2 - \delta^2}{\delta} y + \frac{\rho^2 - \gamma^2}{\gamma} x - \rho^2 = 0.$$

Comme point rattaché au quadrilatère, on pourra choisir son centre de gravité dont les coordonnées sont :

$$y = -\frac{\beta^2\delta(3\alpha^2 + \gamma^2)}{3(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)},$$

$$x = -\frac{\alpha^2\gamma(3\beta^2 + \delta^2)}{3(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)}.$$

Remarque. — Enfin, le point T lui-même peut être mobile, et l'on trouvera de nombreux lieux géométriques, en variant les conditions disponibles.

Observation générale. — Les formules établies dans ce travail sont presque toutes calculables par logarithmes ; encore les autres, telles que celles de LA, LB, LC, LD (n° 14) n'exigent-elles qu'une légère transformation. On peut donc choisir facilement des exercices de calcul logarithmique dans le cours des pages qui précèdent. (*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 162)

OPUS GEOM. — LIB. IX

On appelle *onglet* (ungula) le solide déjà remarqué par Kepler, et obtenu en coupant un cylindre par un plan passant par un diamètre du cercle de base.

V. — *Dans la base d'un demi-cylindre, inscrivons un triangle isoscèle; dans les deux segments, deux triangles également isoscèles, et ainsi de suite. Le prisme ayant pour base le polyèdre ainsi formé différera du demi-cylindre aussi peu qu'on voudra.* Démonstration analogue à celle de la proposition II du livre XII d'Euclide.

VI. — *La même construction faite dans un onglet donnera lieu à la même conclusion.*

VII. — *Les volumes de deux onglets produits dans un même cylindre sont comme leurs hauteurs.* Supposons les deux onglets sur la même base : les prismes inscrits dans chacun de la manière indiquée plus haut (V et VI) seront dans la proportion indiquée. D'après le théorème d'Eudoxe, il en est de même à la limite des deux onglets, à cause de VI.

Remarque. — On a vu (lib. VII, prop. XLVII), que le solide représenté (*fig.* 61), et formé de deux onglets retranchés par des plans à 45° est égal au tétraèdre ayant pour base un demi-carré dont le côté est égal au diamètre, et la hauteur égale à ce même diamètre. L'onglet à 45° est donc égal à la moitié du même tétraèdre. Par conséquent, d'après VIII, *un onglet quelconque est égal au double du tétraèdre qui lui est inscrit.* Aussi, à présent, par le mot onglet, nous entendrons l'onglet à 45°, le volume de l'onglet quelconque s'y rapportant par une simple proportion.

XX. — *Le solide produit par le demi-cercle* ductum in se (*fig.* 61) *est à un autre semblable comme les cubes des diamètres. Conséquence de* VI *et du théorème d'Eudoxe.*

XXI. — *Coupons l'onglet* EDFd (*fig.* 61, 62) *par un plan* AB ab *perpendiculaire à la base et parallèle au diamètre* EF : *l'onglet est à la partie retranchée* DAadbB *comme* $\overline{OE}^3$ *à* $\overline{AC}^3$. *On a*

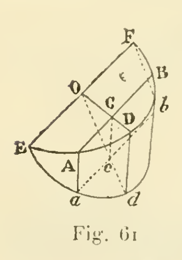


Fig. 61

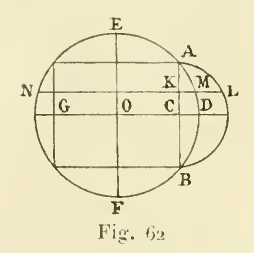


Fig. 62

$$\overline{KL}^2 = KA.KB$$
$$= KM.KN = KM(2.OC + KM) = KM^2 + KM.GC,$$

donc le solide produit du cercle *ductum in se* égale celui du segment AMB *ductum in se* augmenté du cylindre ayant ce segment pour base et GC pour hauteur. Ou bien, en prenant moitié, l'onglet du demi-cercle ALB égale l'onglet du segment AMB plus le cylindre ayant ce segment pour base et OC pour hauteur.

De là la mesure de l'onglet *abd* formé sur un segment par un plan à 45°, et par suite de celui formé par un plan quelconque.

Corol. I. — *Si* BA *est le côté de l'hexagone, la partie de l'onglet retranchée par le plan* BAa *est double de celle retranchée par les plans* EAa, FB*b*. De plus, *le volume du solide restant est égal aux trois quarts de celui de l'onglet.*

Corol. II. — *L'onglet est égal à la moitié du cylindre ayant pour base la parabole inscrite dans le demi-cercle et une hauteur égale au rayon.*

XL. — *Considérons les arcs circulaires égaux* BP, PE, ED,.. DC (*fig.* 63), *et abaissons les ordonnées* PK,...CG ; *on a*

$$PB.PK + PB(PK + EI) + PB(EI + DH) + PB(DH + CG) = AP.BG.$$

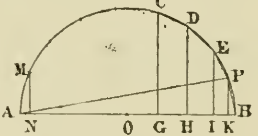


Fig. 63

En effet, d'après un théorème donné par Pappus pour la mesure de la sphère, soient les deux demi-cordes CG, DH (*fig.* 64) et le diamètre perpendiculaire OG ; menons le diamètre DK et la perpendiculaire CL à DH : les triangles CHL et CDK sont semblables et on a

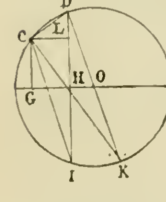


Fig. 64

$$\frac{CD}{CK} = \frac{CL}{LH}.$$

On voit que c'est le théorème XXII d'Archimède, démontré autrement.

(*A suivre*).

EXERCICES (*)

Par M. **Bernès**

VII. — Si D, D′ sont deux points quelconques pris sur BC dans le triangle ABC et qu'on divise AD dans le rapport $-\frac{b^2}{a.\text{CD}}$ par une droite issue de C, et AD′ dans le rapport $-\frac{c^2}{a\text{BD}'}$, par une droite issue de B, ces deux droites se rencontrent au point de Lemoine. Cas particulier où l'on prend $\text{CD} = b$, $\text{BD}' = c$; cas particulier où $\text{BD}' = \frac{c^2}{a}$ et $\text{CD} = \frac{b^2}{a}$. (Le sens BC est supposé le sens positif BD′; le sens CB est le sens positif de CD).

VIII. — Un point D étant donné sur le côté BC du triangle ABC, déterminer sur AC un point E et sur AB un point F tels que si α est la rencontre de BE, CF, β celle CF, AD, γ celle de AD, BE, les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ soient parallèles.

IX. — Le cercle décrit sur le côté BC du triangle ABC comme diamètre coupe AC, AB en B_1, C_1 et M est le milieu du segment de la droite B_1C_1 compris entre BC et la parallèle à BC menée par A. La droite isogonale de BM relativement à l'angle B coupe CA en β, et la droite isogonale de CM relativement à l'angle C coupe AB en γ. Démontrer que la droite $\beta\gamma$ passe par le point de Lemoine et par le centre O du cercle ABC.

√ **X.** — 1° La droite qui joint les pieds des symédianes issues de B et C, celle qui joint les pieds des hauteurs issues des mêmes points, et celle qui joint les points où les rayons BO, CO du cercle ABC coupent AC, AB sont concourantes.

2° Si M est le point de concours, les isogonales de BM, CM relativement aux angles B, C rencontrent AC, AB sur la droite d'Euler OH. Généraliser.

XI. — On considère un triangle ABC et la circonférence circonscrite. Un point D étant donné sur celle-ci, déterminer sur AB, AC deux points E, F tels que si α est la rencontre des circonférences ACE, ABF et β, γ les points où ces mêmes circonférences

(*) Voyez p. 167.

rencontrent AD, les deux circonférences ABβ, ACγ soient tangentes à Aα.

XII. — Dans un triangle ABC, les tangentes en A, B, C au cercle ABC rencontrent les côtés opposés en L, M, N ; les parallèles à AL par B et C coupent AC, AB en λ, λ' ; les parallèles à BM par C et A coupent BA, BC en μ, μ' ; et les parallèles à CN par A et B coupent CB, CA en ν, ν'. Démontrer : 1° que les triangles A$\lambda\lambda'$, B$\mu\mu'$, C$\nu\nu'$ sont équivalents au triangle ABC, et aussi les triangles LCλ, LBλ', MAμ, MCμ', NBν, NAν'. 2° Que les droites $\mu\nu'$, $\nu\lambda'$, $\lambda\mu'$ sont parallèles à la droite LMN et que leurs longueurs sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2, les distances MN, NL, LM étant proportionnelles à $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$. 3° Que les cercles A$\mu\nu'$, B$\nu\lambda'$, C$\lambda\mu'$ ont leurs centres ω, ω', ω'' respectivement sur les médiatrices de BC, CA, AB et que leurs rayons sont proportionnels à a, b, c. 4° Que le triangle $\alpha\beta\gamma$ formé par les intersections deux à deux des droites Aω, Bω', Cω'' (dans l'ordre habituel) est inversement semblable à ABC. 5° Que si D, E, F sont les intersections de $\mu\nu'$, $\nu\lambda'$, $\lambda\mu'$ avec BC, CA, AB, les droites AD, BE, CF sont parallèles ; et si S est le point de Steiner, ces droites sont isotomiques de AS, BS, CS relativement à BC, CA, AB.

XIII. — Dans un triangle ABC, on mène par A un couple quelconque de droites isogonales relativement à A, par B un couple quelconque de droites isogonales relativement à B, et par C de même un troisième couple. On coupe ces trois couples en α, α' ; β, β' ; γ, γ' par trois droites parallèles. Démontrer que les tangentes en A, B, C avec trois cercles A$\alpha\alpha'$, B$\beta\beta'$, C$\gamma\gamma'$ rencontrent le cercle ABC au même point.

XIV. — Sur les côtés AB, AC d'un triangle ABC on suppose deux points E, F situés sur une parallèle à BC. Sur BF on prend deux points P, P' isotomiques relativement à BF et sur CE deux points Q, Q' isotomiques relativement à CE. Les droites CP, BQ se coupant en T, et les droites CP', BA' en T', démontrer que AT, AT' sont isotomiques sur BC.

XV. — E, F étant supposés quelconques sur AB, AC, on prend sur BF deux points P, P' et sur CE deux points Q, Q'. Les droites CP, BQ se coupant en T, et les droites CP', BQ' se coupant en T',

démontrer que la condition pour que AT, AT′ soient conjuguées harmoniques relativement à AB, AC et que les deux rapports anharmoniques (BFPP′), (CEQQ′) soient égaux et de signes contraires. Plus généralement on a : A,BCTT′ = (BFPP′) : (CEQQ′).

XVI. — Dans un triangle ABC, M étant la rencontre de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire en C à AC, N celle de la médiatrice de AC et de la perpendiculaire en B à AB, démontrer : 1° que MN est perpendiculaire à la symédiane issue de A et passe aux $\frac{3}{4}$ de la corde interceptée sur cette symédiane par la circonférence ABC. 2° Les côtés MN, NA, AM du triangle AMN sont proportionnels aux médianes du triangle ABC, et le centre O du cercle ABC est le centre de gravité du triangle AMN. 3° Les points où BM est coupé par la médiatrice de AC et CN par celle de AB sont équidistants de BC. Expression de cette distance en fonction de a,b,c.

XVII.— 1° La droite qui joint l'orthocentre H d'un triangle ABC au milieu du côté BC est perpendiculaire à la droite AL conjuguée harmonique de AH relativement à AB, AC. 2° Si, R étant le rayon du cercle ABC, on porte sur AH dans le sens AH une longueur AF égale à $\frac{2R^2}{AH}$, la droite qui joint F au centre O du cercle ABC est perpendiculaire sur la conjuguée harmonique de AO relativement à AB, AC.

XVIII. — Sur les trois côtés d'un triangle ABC BC, CA, AB on suppose trois points l, m, n satisfaisant aux relations :

$$\begin{aligned} Cm.Bn &= AB.AC \\ An.Cl &= BC.BA \\ Bl.Am &= CA.CB \end{aligned}$$

où les longueurs sont considérées en grandeur et ligne.

1° Montrer qu'ils satisfont aussi aux relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{AC}{Am} + \frac{AB}{An} &= 1, \\ \frac{BA}{Bn} + \frac{Bl}{Bl} &= 1, \\ \frac{CB}{Cl} + \frac{CA}{Cm} &= 1, \end{aligned}\right.$$

et que l'un de ces points reste arbitraire.

2° Les droites Al, Bm, Cn sont concourantes, et quand l, m, n se déplacent, l'isogonal de ce point de concours parcourt la droite de Lemoine.

3° Les deux circonférences qui passent par l et sont tangentes l'une en B à BA, l'autre en C à CA ; celles qui passent par m et sont tangentes en C à CB, en A à AB ; celles qui passent par n et sont tangentes en A a Ac. en B à BC, se coupent en un même point P situé sur la circonférence ABC. Les distances de P aux trois sommets A, B, C sont données par $BC.PA = Am.PB = -An.PC$, ou encore $-Bl.PA = CA.PB = Bn.PC$, ou $Cl.PA = -Cm.PB = AB.PC$, et la distance de P à l, m, n sont données par

$$Pl = \frac{PB.PC}{PA}, \quad Pm = \frac{PC.PA}{PB}, \quad Pn = \frac{PA.PB}{PC}.$$

Ces relations sont des équipollences, c'est-à-dire qu'elles expriment une propriété angulaire en même temps qu'une propriété métrique.

XIX. — Sur les trois côtés BC, CA, AB du triangle ABC on suppose trois points l_1, m_1, n_1 satisfaisant aux relations

$$\frac{AC}{Am_1} + \frac{AB}{An_1} = 3, \quad \frac{BA}{Bn_1} + \frac{BC}{Bl_1} = 3, \quad \frac{CB}{Cl_1} + \frac{CA}{Cm_1} = 3.$$

1° Montrer que l'un d'eux reste arbitraire, et qu'ils sont tous les trois sur une ligne droite qui passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

2° Si $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ désignent les valeurs des trois rapports $\frac{Am_1}{An_1}$, $\frac{Bn_1}{Cl_1}$, $\frac{Cl_1}{Cm_1}$ dont le produit est égal à l'unité, on a

$$\frac{a.Gl_1}{\alpha} = \frac{b.Gm_1}{\beta} = \frac{c.Gn_1}{\gamma}.$$

3° Plus généralement, si par un point fixe $Q(x_1, y_1, z_1)$ on trace une droite quelconque qui coupe BC, CA, AB en l_1, m_1, n_1, on a la relation

$$\frac{1}{a}\left(\frac{y_1}{An_1} - \frac{z_1}{Am_1}\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{z_1}{Bl_1} - \frac{x_1}{Bn_1}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{x_1}{Cm_1} - \frac{y_1}{Cl_1}\right) = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{abc},$$

et

$$\frac{Ql_1}{\alpha x_1} = \frac{Qm_1}{\beta y_1} = \frac{Qn_1}{\gamma z_1}.$$

Dans ces relations BC, CA, AB représentent l'orientation positive des longueurs comptées sur ces droites, où α, β, γ ont la même signification.

XX. — L, M, N étant trois points en ligne droite situés sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC.

1° Les tangentes en A, B, C aux trois cercles AMN, BNL, CLM rencontrent le cercle ABC en un même point S. Et si les parallèles menées par A, B, C à la droite LMN rencontrent les côtés opposés en A_1, B_1, C_1, les distances SA, SB, SC sont inversement proportionnelles à $a.AA_1$, $b.BB_1$, $c.CC$.

2° Les trois cercles AMN, BNL, CLM coupent le cercle ABC en un même point P, et l'on a

$$\frac{a.PA}{MN} = \frac{b.PB}{NL} = \frac{c.PC}{LM}.$$

3° On a aussi les relations : PA.PL = PB.PM = PC.PN. Et ces relations sont des équipollences, c'est-à-dire qu'à la propriété métrique qu'elles expriment s'ajoute cette propriété angulaire : que les angles APL, BLM, CPN ont même bissectrice.

Si la droite LMN est la droite de Lemoine, le point S est le point de Steiner ; et si LMN est la droite qui joint le point de Lemoine au centre du cercle ABC, le point S est le point de Tarry. Plus généralement, si deux positions de la droite LMN font un certain angle φ, l'arc du cercle ABC qui est compris entre les deux positions correspondantes de S est égal à 2φ.

XXI. — Par B et C, on fait passer un cercle ω qui coupe en D la droite de Lemoine du triangle ABC. AD coupe le cercle ω en E et le cercle ABC en L. Si M et N sont les points où les cercles ACE, ABE coupent respectivement AB, AC.

1° Les parallèles menées par M, N à AC, AB, se coupent sur BC. en un point P ;

2° Les cercles LBP, LCP sont tangents, le premier à AB, le second à AC ; et les cercles MBP, NCP sont tous les deux tangents au cercle ABC.

XXII. — Un cercle de rayon arbitraire ayant pour centre le sommet A du triangle ABC coupe BC en D, E. Les symétriques de D, E relativement à AB pour l'un, à AC pour l'autre sont D', E', et les droites CD', BE' rencontrent AB, AC en F, G. Démontrer que, le 4e sommet du parallélogramme construit sur AF, AG étant L, AL est la symédiane de ABC et que la polaire de L relativement au cercle passe par le centre O du cercle ABC.

XXIII. — O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, et les perpendiculaires en O à AO, BO, CO rencontrant les trois symédianes de ABC en K, K', K'', démontrer que la somme algébrique des projections de AK, BK', CK'' sur une droite quelconque du plan est égale à zéro.

XXIV. — D, D', D'' étant trois points pris sur les côtés BC, CA, AB de ABC, démontrer que la condition pour que la somme algébrique des projections de AD, BD', CD'' sur une droite quelconque du plan soit égale à zéro est que D, D', D'' divisent respectivement BC, CA, AB suivant un même rapport.

XXV. — Les trois droites AD, BD', CD'' de la question précédente se coupant deux à deux en A_1, B_1, C_1 (dans l'ordre habituel), trouver la condition pour que AD, AD', AD'' soient proportionnels aux côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 du triangle $A_1B_1C_1$. Maximum et minimum du rapport $\frac{B_1C_1}{AD}$.

XXVI. — A_1, B_1, C_1 étant définis comme dans la question précédente, trouver la condition pour que la somme des projections de AA_1, BB_1, CC_1 sur une droite quelconque du plan soit égale à 0.

XXVII. — Un point D étant donné sur BC en détermine deux autres D', D'' sur AC, AB par la condition que les trois aires AD'D'', BD''D, CDD' soient équivalentes et de même sens.

XXVIII. — Si l'on désigne par — K, — K', — K'' les trois rapports suivant lesquels les trois points D, D', D'' divisent respectivement BC, CB, AB et qu'on pose

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + K' + K'K'' = \theta, \\ 1 + K'' + K''K = \theta', \\ 1 + K + KK' = \theta'', \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} 1 + KK' + K^2K'K'' = t, \\ 1 + K'K'' + KK'^2K'' = t', \\ 1 + K''K + KK'K''^2 = t''. \end{array}\right.$$

Démontrer : 1° Que dans le triangle DD'D'' et dans le triangle

ABC le centre des distances proportionnelles des sommets affectés des coefficients $(1 + K)\theta$, $(1 + K')\theta'$, $(1 + K'')\theta''$ est le même. 2° Si $A_1B_1C_1$ est le triangle formé par les intersections de AD, BD′, CD″ le centre des distances proportionnelles des sommets affectés des coefficients θt, $\theta' t'$, $\theta'' t''$ est le même pour $A_1B_1C_1$ que pour ABC. En particulier si $K = K' = K''$ le centre de gravité est le même dans les trois triangles ABC, DD′D″, $A_1B_1C_1$.

XXIX. — On considère un triangle ABC et le point A′ symétrique de A relativement au milieu de BC : 1° Le cercle $C(b)$ et le cercle ACA′ se coupent en β sur la symédiane issue de A′, le cercle $B(c)$ et le cercle ABA′ se coupent en γ sur la même symédiane. 2° β', γ' étant les intersections de $C(b)$, $B(c)$ avec la médiane, les quatre points β, γ, β', γ' sont sur une même circonférence qui a pour centre A′. 3° Si I est la rencontre de $C\beta$, $B\gamma$ et I′ celle de $C\beta'$, $B\gamma'$, les points I et I′ sont sur la circonférence BCA′ et $AI = AI'$. Les triangles $I\gamma\beta$, $I'\beta'\gamma'$ sont, l'un directement, l'autre inversement semblables à CAA′.

XXX. — Dans un triangle ABC, les perpendiculaires abaissées du milieu D de BC sur AB, AC rencontrent AB, AC en δ, δ' ; $D\delta$ rencontre la médiane BE en P et $D\delta'$ la médiane CF en Q : 1° α, α' étant les rencontres de AP, AQ avec BC, les droites $\delta\alpha$, $\delta'\alpha'$ passent par le symétrique A′ de A relativement à D. 2° La parallèle à AD menée par l'orthocentre et la droite PQ rencontrent BC en deux points qui sont conjugués harmoniques relativement à BC. 3° L'isotomique P′ de P relativement à BE est sur la médiatrice de AB, et l'isotomique Q′ de Q relativement à CF est sur la médiatrice de AC. 4° CP′, BQ′ se coupent sur le rayon AO du cercle ABC, et CP, CQ sur la droite isotomique de AO relativement à BC. 5° Si dans un triangle $A_1B_1C_1$ construit avec les trois médianes AD, BE, CF pour côtés, on considère les points P'_1, Q'_1 définis comme P′, Q′ et que O_1 soit le centre du cercle $A_1B_1C_1$, le rapport suivant lequel $C_1P'_1$, $B_1Q'_1$ divisent A_1O_1 est égal au rapport suivant lequel AO est divisé par CP′, BQ′.

(*A suivre*).

EXERCICES

Par M. **A. Boutin**

448. — *Dans la suite de Fibonacci, où* $u_0 = 0$, *les nombres :* u^4_{15n-2}, u^4_{15n-1}, u^4_{15n+1}, u^4_{15n+2}, *sont terminés par l'unité.*

449. — $A_1B_1C_1$ *étant le triangle podaire d'un point quelconque* M *du plan d'un triangle* ABC ; *les droites de Newton des quadrilatères* MB_1C_1A, MA_1C_1B, MA_1B_1C, *sont trois droites concourantes.*

Ces droites concourent au centre M′ du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$, M′ est le milieu de MM_2 (M_2 inverse de M dans ABC). On peut remarquer que M et M′ sont deux points inverses dans le triangle qui a pour sommet les centres des cercles circonscrits aux quadrilatères considérés.

450. — S_M *étant la droite de Simson relative à un point quelconque* M *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, O *le centre de cette circonférence, si on mène par* O_9 (*centre du cercle des neuf points*) *une droite parallèle à* OM *et de même sens, elle rencontre en* M_1 *la circonférence des neuf points; soient enfin,* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés de* ABC. *Les côtés de ce triangle* ABC *et* S_M *forment un quadrilatère dont la droite de Newton est* N_M. *Démontrer que :*

1° M_1 est sur S_M ;

2° S_M et N_M sont rectangulaires ;

3° N_M est la droite de Simson de M_1 par rapport au triangle $A_1B_1C_1$.

Il en résulte que si M décrit la circonférence circonscrite à ABC, N_M enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

451. — *La droite harmoniquement associée à un point quelconque* M *du plan d'un triangle forme avec les côtés de ce triangle un quadrilatère complet ; si* M *décrit une droite, la droite de Newton de ce quadrilatère pivote autour d'un point fixe.*

452. — *Les côtés d'un pentagone quelconque pris quatre à quatre de toutes les manières possibles forment cinq quadrilatères. Démontrer que les cinq droites de Newton correspondant à ces quadrilatères concourent en un même point.*

On pourrait appeler ce point : point de Newton du pentagone.

Si ABC est un triangle coupé par deux transversales quelconques dont les équations sont (en coordonnées barycentriques) :

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}+\frac{\beta}{\beta_1}+\frac{\gamma}{\gamma_1}=0,$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_2}+\frac{\beta}{\beta_2}+\frac{\gamma}{\gamma_2}=0,$$

les droites de Newton des quadrilatères formés par le triangle et chacune de ces transversales ont pour équations :

$$\Sigma\alpha(\beta_1+\gamma_1-\alpha_1)=0, \quad \Sigma\alpha(\beta_2+\gamma_2-\alpha_2)=0.$$

Ces droites se coupent au point :

$$\frac{\alpha}{\alpha_1(\beta_2-\gamma_2)-\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)}=\frac{\beta}{\beta_1(\gamma_2-\alpha_2)-\beta_2(\gamma_1-\alpha_1)}=\frac{\gamma}{\gamma_1(\alpha_2-\beta_2)-\gamma_2(\alpha_1-\beta_1)}.$$

On constate aisément que les trois autres droites de Newton passent par ce point.

On en déduit que les côtés d'un hexagone quelconque pris quatre à quatre de toutes les manières possibles, forment quinze quadrilatères, dont les quinze droites de Newton concourent cinq par cinq en six points.

453. — *On joint un point* M *de la circonférence* Δ, *circonscrite* O *à un triangle* ABC, *aux trois sommets de ce triangle ; on mène les droites qui joignent respectivement les milieux des côtés de ce triangle aux milieux des droites* MA, MB, MC. *Démontrer que :*

1° *Ces trois droites concourent en un même point* M′.

2° *Le lieu géométrique de* M′ *quand* M *décrit* Δ *est la circonférence des neuf points du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* ABC.

3° *La droite qui joint* M′ *au milieu de* OO_9 *est parallèle à* OM *et en est le quart.*

Prenons pour triangle de référence le triangle $A_1B_1C_1$ qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC ; soient en coordonnées barycentriques α_1, β_1, γ_1, les coordonnées de M. On a la relation :

$$(1) \qquad \frac{a^2}{\beta_1+\gamma_1}+\frac{b^2}{\alpha_1+\gamma_1}+\frac{c^2}{\alpha_1+\beta_1}=0,$$

l'équation d'une des trois droites considérées est :

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{2\beta_1+\alpha_1+\gamma_1}{2\gamma_1+\alpha_1+\beta_1},$$

les trois droites analogues se coupent donc au point :

$$\frac{\alpha}{2\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}=\frac{\beta}{2\beta_1+\alpha_1+\gamma_1}=\frac{\gamma}{2\gamma_1+\alpha_1+\beta_1},$$

d'où

(2) $$\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha_1+\beta_1}=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{\alpha_1+\gamma_1}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta_1+\gamma_1}.$$

L'équation du lieu de M' s'obtient en éliminant : α_1, β_1, γ_1 entre (1) et (2), ce qui donne :

$$\sum\frac{a^2}{\beta+\gamma-\alpha}=0,$$

cercle des neuf points de $A_1B_1C_1$.

Le 3° se vérifie aisément.

On peut généraliser par projection.

454. — *Si une droite passe par un point fixe, la droite de Newton du quadrilatère formé par cette droite et un triangle* ABC, *enveloppe une conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* ABC.

α_1, β_1, γ_1 étant les coordonnées barycentriques du point fixe, on trouve pour équation de l'enveloppe :

$$\sqrt{\alpha_1(\beta+\gamma-\alpha)}+\sqrt{\beta_1(\alpha-\beta+\gamma)}+\sqrt{\gamma_1(\alpha+\beta-\gamma)}=0.$$

455. — d *et* d' *étant les distances de deux points fixes à une droite* Δ, *si on établit entre* d *et* d' *une relation linéaire, telle que :*

$$Ad+Bd'=C,$$

la droite Δ *enveloppe une circonférence dont le centre est sur la ligne qui joint les points fixes.*

Soient pour axes, la droite des points fixes, et une perpendiculaire en son milieu, $2a$ étant la distance de ces points ; on a les relations :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,$$
$$A(p-a\cos\alpha)+B(p+a\cos\alpha)=C,$$

d'où pour équation de l'enveloppe :

$$y^2+\left(x-a\,\frac{A-B}{A+B}\right)^2=\frac{C^2}{(A+B)^2}.$$

456. — d_a, d_b, d_c, *étant les distances des sommets d'un triangle à une tangente quelconque au cercle circonscrit, démontrer la relation :*

$$a\sqrt{d_a}+b\sqrt{d_b}+c\sqrt{d_c}=0.$$

457. — *Les distances* d *et* d' *de deux points fixes* F, F', *à une droite étant liées par la relation :*

$$Ad^2+Bd'^2+Cdd'=k^2,$$

démontrer que cette droite enveloppe une conique dont un des axes est dirigé suivant FF'.

Si $C = 0$, $A = B = 1$, que $2a^2$ soit la constante et $2c$ la distance des points fixes, on peut dire :

L'enveloppe des droites telles que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes est constante est un ellipse (ou une hyperbole) dont l'axe focal est perpendiculaire au milieu de la droite FF', $2c$ *est la distance des foyers.*

458. — *On considère un faisceau de* $2n + 1$ *droites :* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{2n+1}$, *concourantes en un même point* H, *et numérotées dans l'ordre où on les rencontre dans un même sens de rotation. D'un point quelconque* A_1 *de* Δ_1 *on abaisse sur* Δ_2 *une perpendiculaire qui rencontre* Δ_3 *en* A_3, *de* A_3 *on abaisse une perpendiculaire sur* Δ_4 *qui rencontre* Δ_5 *en* A_5, *de* A_5 *sur* Δ_6 *une perpendiculaire rencontrant* Δ_7 *en* A_7, *etc. Démontrer que le contour polygonal ainsi formé se ferme de lui-même et constitue un polygone convexe de* $2n + 1$ *côtés.*

Au moyen de A_1 H, et des angles successifs que les droites Δ forment entre elles, on calcule aisément tous les éléments de ce polygone.

459. — *Soient* M, M_2, *deux points inverses dans le triangle* ABC ; *on a :*

$$MA.\sin BMC = M_2A.\sin BM_2C = f(a, b, c).$$

A un facteur constant près, si M et M_2 désignent :

O et H, $f(a, b, c) = \sin 2A$,

K et G, $f(a, b, c) = m^2$, (m, médiane relative à a)

I, $f(a, b, c) = \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$,

V et V_2, $f(a, b, c) = \frac{\cos (A - 30^o)}{a}$,

Ω et Ω' (points de Brocard), $f(a, b, c) = \frac{1}{a^2}$.

460. — V_2 *étant le premier centre isogone d'un triangle* ABC, *démontrer que si par* O_9, *on mène des parallèles à* AV_2, BV_2, CV_2, *ces droites sont les tangentes aux points de rebroussement de l'hypocycloïde, enveloppe des droites de Simson.*

This statement is untrue

Les points A_1, B_1, C_1 du cercle circonscrit qui ont pour droite de Simson ces tangentes de rebroussement, sont tels que OA_1, OB_1, OC_1, sont respectivement parallèles à ~~AV_2, BV_2,~~ CV_2. ces tangentes de rebroussement

461. — *Soient* a_1, b_1, c_1, *les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle* ABC ; *on projette* a_1 *respectivement en* B_1 *et* C_1, *respectivement sur* AB *et* AC ; *les droites analogues à* B_1C_1 *déterminent le triangle* A'B'C'. — *Démontrer que* :

1° *Les triangles* ABC, A'B'C' *sont homologiques* ;

2° P *étant le centre d'homologie, l'inverse* P_2 *de* P *dans le triangle* ABC *est situé sur* OI, *et partage cette distance dans le rapport* :

$$\frac{P_2I}{P_2O} = \frac{2r}{R};$$

3° α_1, β_1, γ_1 *étant les projections de* I *sur les côtés de* ABC, *les droites* $A'\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$, *concourent en un point* M, *situé sur* PI.

On trouve en coordonnées normales pour équation de B_1C_1 :

$$-x(1 + \cos A) + y \cos B + z \cos C = 0,$$

d'où pour équation de AA' :

$$-y(1 + 2 \cos B) + z(1 + 2 \cos C) = 0.$$

Les droites telles que AA', concourent donc au point :

(P) $$x(1 + 2 \cos A) = y(1 + 2 \cos B) = z(1 + 2 \cos C).$$

L'équation de $A'\alpha_1$ est :

$$x \cos A(\cos C - \cos B) - y(1 + \cos B)(1 + \cos B + \cos C) + z(1 + \cos C)(1 + \cos B + \cos C) = 0.$$

Les droites analogues concourent donc au point M, dont les coordonnées normales sont :

$$x : y : z = (1 + \cos B + \cos C)(1 + \cos A + \cos B + \cos C + 2 \cos B \cos C) : \ldots\ldots$$

462. — *Un triangle équilatéral* A'B'C' *se déplace en restant inscrit dans un cercle fixe* ; P *est un point fixe quelconque du plan. Les droites* PA', PB', PC', *rencontrent une seconde fois la circonférence en* A, B, C. *Démontrer que le lieu géométrique de l'orthocentre de* ABC *est une circonférence.*

Le lieu géométrique du centre de gravité et du centre du cercle des neuf points de ABC, est également une circonférence.

433. — n *étant un entier positif quelconque, démontrer que :*

$3^n + 4^{2n+3}$	est divisible par	13,
$2^n + 3^{3n+2}$	—	7,
$3^n + 2^{8n+5}$	—	11,
$2^n + 5.27^{5n+1}$	—	17,
$2^n + 3^{7n+9}$	—	19,
$3^n + 5.2^{8n+5}$	—	23,
$2^n + 3^{17n+14}$	—	29,
$3^n + 2^{5n+14}$	—	29,
$2^n + 27^{8n+5}$	—	31,
$3^n + 4^{13n+9}$	—	37,
$27^n + 2^{11n+7}$	—	43,
$7^n + 2^{7n+5}$	—	11,
$2^n + 7^{11n+6}$	—	13,
$5^n + 7^{15n+8}$	—	17,
$3^n + 7^{2n+11}$	—	23,
$7^n + 11^{5n+6}$	—	13,
$5^{n+3} + 11^{3n+1}$	—	17,
$13^{2n+1} + 11^{8n+4}$	—	17,
$13^n + 3^{17n+9}$	—	19.

On peut trouver une infinité de relations du même genre.

Ces propositions peuvent se démontrer d'une manière uniforme : soit en constatant que les résidus sont complémentaires par rapport au module; soit en vérifiant la proposition pour les premières valeurs de n, et ensuite montrant que la proposition supposée vraie pour n est vraie pour $n + 1$.

QUESTION PROPOSÉE

810. — Le point o est le centre du cercle circonscrit au triangle abc et a', b' sont les pieds des hauteurs de ce triangle, issues de a, b :

1° aob', boa' sont équivalents; 2° Le triangle aob et le quadrilatère $oa'cb'$ sont équivalents? (*Mannheim*).

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 169)

62. — *Dans chaque groupe, le lieu des foyers est une circonférence concentrique au cercle bitangent de seconde espèce.*

Soit F (*fig.* 35) l'un des foyers; on a [**49**]

$$H'F = er';$$

H'F est donc constant.

Cette expression de H'F donne, avec la seconde des égalités (1) et l'une des égalités (2),

$$\overline{H'F}^2 = HH'.H'\Omega_1;$$

ainsi, le rayon du lieu est la tangente menée de H' à la circonférence décrite sur $H\Omega_1$ comme diamètre.

63. — Soit S' (*fig.* 35) le saillant correspondant à l'une des coniques et au cercle bitangent de seconde espèce; soit G la projection du centre O sur HH'; menons OI parallèle à cette dernière ligne jusqu'à sa rencontre en I avec $S'\Omega_1$. Les deux droites HH', $S'\Omega_1$ étant perpendiculaires entre elles [**60**], les triangles semblables OHH', OIS' donneront HH'.OI = OH'.OS'. Dans le premier produit, on peut remplacer OI par $G\Omega_1$; quant au second, il est égal à c^2 [**44**]; il vient donc

$$HH'.G\Omega_1 = c^2,$$

ce qui permet de compléter les relations (2), et d'écrire

$$(4) \qquad \frac{a^2}{H'\Omega} = \frac{b^2}{H\Omega} = \frac{c^2}{HH'} = G\Omega_1.$$

D'après cela, si, sur la circonférence HH', on a choisi ou déterminé le point qui doit servir de centre à la conique, il sera facile de construire les éléments linéaires de cette conique.

64. — De deux cercles bitangents à une conique et n'ayant pas leurs centres sur le même axe, celui de première espèce est intérieur à l'autre, dans le cas de l'ellipse; il lui est extérieur dans le cas de l'hyperbole.

Géométriquement, il n'y a donc pas de conique bitangente à deux cercles qui se coupent.

Si l'un des cercles enveloppe l'autre, toutes les coniques bitangentes seront des ellipses dont l'axe focal passera par le centre du plus petit. Elles formeront deux groupes dont chacun ne contiendra que des courbes semblables entre elles. Le lieu complet de leurs foyers se composera de deux circonférences concentriques au plus grand des deux cercles.

Dans le cas de deux cercles extérieurs, toutes les coniques sont des hyperboles. Pour une première série d'entre elles, l'axe focal passe par le centre de l'un des cercles ; pour la seconde série, il passe par le centre de l'autre. En changeant, dans les égalités (4), H en H′, et réciproquement, on voit que la seconde série est formée des hyperboles conjuguées à celles qui entrent dans la première. Dans chaque série, il y a deux groupes dont chacun ne contient que des courbes semblables entre elles. Le lieu complet des foyers se compose de quatre cercles, deux à deux concentriques.

65. Problèmes. — *Construire les éléments d'une conique bitangente à deux cercles donnés, sachant de plus qu'elle doit être concentrique à l'un* — ou *lui être osculatrice* — ou *passer par un point donné* — ou *avoir pour tangente une droite donnée.*

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 177)

XLI. — *Dans la base* AFB (*fig.* 65) *d'un onglet, inscrivons un polygone régulier* BCD...F, *et coupons-le par les plans perpendiculaires* BCc, CDdc, DEed,... *La surface latérale du prisme ainsi formé a pour mesure* $\frac{\varphi B.AC}{2}$. En effet, cette surface s'exprime par

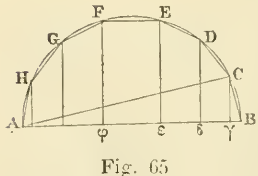


Fig. 65

$$\left(\frac{Ff+Ee}{2}+\frac{Ee+Dd}{2}+\dots\right)BC=\frac{(F\varphi+E\varepsilon)BC+(E\varepsilon+D\delta)BC+\dots}{2}$$

Corol. — Si la demi circonférence (*fig.* 63) est divisée en un nombre quelconque d'arcs égaux BP, PE,...MA, on a d'après XL

$$PK + EI + \ldots + MN = \frac{AB.AP}{2.PB}.$$

Donc la surface totale du prisme (XLI) a pour mesure $\frac{AB.AC}{2}$ (*fig.* 65) (*).

XLIII. — *A la base* AFB *d'un onglet* (*fig.* 66), *circonscrivons un segment de polygone régulier* RQPNMB : *la surface latérale du tronc de prisme circonscrit à l'onglet et ayant ce segment pour base a pour mesure, déduction faite du triangle* BMm *correspondant au côté* BM, *l'expression* $\frac{AB.AC}{2}$. Désignons par les petites lettres correspondantes les intersections des arêtes du prisme avec le plan sécant, la surface indiquée a pour expression

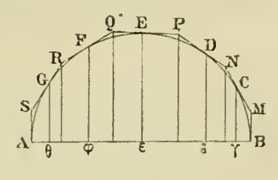


Fig. 66

$$QR(F\varphi + E\varepsilon + D\delta + C\gamma).$$

On est encore ramené à XL.

Corol. — La surface latérale du prisme total moins les deux triangles BM*m*, AS*s* est donc toujours égale à la moitié du carré du diamètre.

XLV. — *La surface latérale de l'onglet est égale à la moitié du carré du diamètre.* Conséquence des deux propositions précédentes. Démonstration par la méthode d'exhaustion.

XLVI. — *La partie de la surface latérale de l'onglet correspondant à l'arc* CB (*fig.* 67) *a pour mesure la moitié du rec-*

(*) Soit O le centre de l'arc BC (*fig.* 63) : on aura pour la somme des prismes triangulaires tronqués POB, EOP, DOE, COD

$$\text{tri.OPB}\left(\frac{Pp}{3} + \frac{Pp+Ee}{3} + \frac{Ee+Dd}{3} + \frac{Dd+Cc}{3}\right) = \frac{OB.PK}{6}(2.PK + 2.EI + 2.DH + CG),$$

d'où une autre manière de calculer le volume du prisme inscrit dans un segment d'onglet, et par là le volume de l'onglet lui-même.

tangle de AB *et de* Bγ. De là, la mesure de la surface de l'onglet correspondant à un segment CD.

Fig. 67

LIV. — *Les surfaces latérales de deux onglets sont comme leurs hauteurs.* Conséquences de XLI et de XLII.

On a ainsi le moyen de mesurer le volume et la surface de tous les onglets construits sur le demi-cercle ou un segment quelconque et par un plan quelconque.

CCV. — *Mesure du cylindre parabolique et du segment de parabole.* Soit le segment parabolique quelconque ABC (*fig.* 68);

on a
$$\text{GI}.\text{GL} = \overline{\text{GK}}^2,$$

donc le cylindre parabolique produit par GI ductum in GL est égal à la pyramide résultant de GK ductum in se. Cette pyramide étant égale au tiers du prisme GL ductum in se, il en est de même du cylindre. Le prisme et le cylindre ayant des hauteurs égales, la base du premier est donc le triple de celle du second, donc la surface AICD vaut le tiers du rectangle AC.

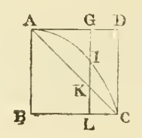


Fig. 68

LXXXVI. — *Deux onglets déterminés dans un cylindre parabolique par deux plans d'égales inclinaisons sont comme les cinquièmes puissances de leurs cordes.* Soient ADC, ALK (*fig.* 69) les bases des deux onglets. Divisons HK et BC proportionnellement en Q et P, puis menons des plans perpendiculaires qui déterminent dans les deux onglets les triangles semblables QNn, BMm. Le reste s'achève sans difficulté à cause de

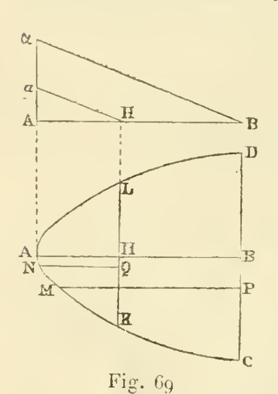


Fig. 69

$$\frac{\text{N}n}{\text{M}m} = \frac{\text{NQ}}{\text{MP}} = \frac{\text{KQ}.\text{QL}}{\text{CP}.\text{PB}}.$$

Il tire de cette proposition la mesure de l'onglet parabolique par des transformations trop longues pour qu'elles puissent être indiquées ici.

CXXIX. — *Dans deux demi-ellipses* AB *inscrivons deux segments de paraboles* a, b : *les sphéroïdes provenant de* A *et de* B *sont entre eux comme les produits des segments paraboliques multipliés respectivement par les demi-axes des ellipses*. On a en effet (*fig.* 70).

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{AP.PC}{AO.OC} = \frac{PN}{BO} \quad \text{d'où } \overline{MP}^2 = PN.OB,$$

donc le solide de la demi-ellipse ABC ductum in se est égal au cylindre ayant la parabole pour base et OB pour hauteur.

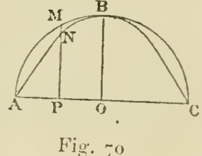


Fig. 70

Or, le solide formé par une surface ductum in se est à celui produit par la révolution de cette même surface comme le rayon du cercle est à sa circonférence. La proposition est donc démontrée.

De cette remarque, — nouveau corollaire du théorème de Kepler, — découlent un grand nombre de mesures de corps nouveaux.

Inutile d'ajouter que la proposition CXXIX ramène la mesure de la tranche de sphéroïde à celle d'une tranche sphérique.

CLV. — *Le conoïde parabolique est au cône inscrit comme trois à deux*. En effet, on a (*fig.* 71)

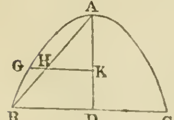


Fig. 71

$$\overline{GK}^2 = HK,BD,$$

le reste de la démonstration s'achève à l'aide de la remarque précédente.

CLXXXIX. — *Mesure du conoïde hyperbolique*. Considérons le cône asymptotique MON du conoïde PCQ (*fig.* 72); chaque section de ces deux solides détermine une couronne circulaire MKNQP, dont la surface est constante, puisque PK = PM = AC : le volume concave produit par la révolution de CAMP a ses sections égales à celles du cylindre AS, et par suite il lui est égal.

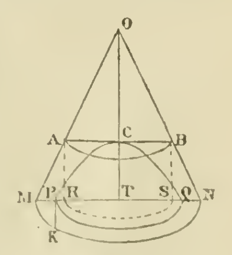


Fig. 72

CXCVII. — *A l'extrémité* C *de l'axe de*

l'ellipse AB (*fig.* 73), *menons une tangente* AC, *construisons l'hyperbole* CB, *et tirons* CB : *le conoïde produit par la révolution de l'hyperbole est égal à la somme du cône produit par la droite* CB *et du sphéroïde produit par l'ellipse* AB.

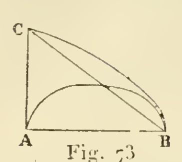


Fig. 73

CXCVIII,CC,CCIV. — *Coupons un cône circulaire quelconque par un plan* MPN, *parallèle à la génératrice* SB : *la partie* SMNP *du cône est au tétraèdre* SMNP *comme* 4 *à* 3 (*fig.* 74). *Si* TR *est une autre section parallèle à la première, les deux parties du cône* SMNP, SQTR *sont comme* $\overline{NP}^3$ *est à* $\overline{TR}^3$, *de sorte que si* BR = AP, *ces deux parties sont égales.*

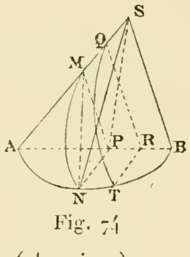


Fig. 74

(*A suivre*).

EXERCICES

Par M. **Boutin**

464. — *On considère le tableau :*

				137						
			65	61	57	53	49			
			69	17	13	9	45			
			73	21	1	5	41			
			77	25	29	33	37	105		
			81	85	89	93	97	101		

qui comprend tous les nombres impairs de la forme : $4n + 1$,

disposés dans leur ordre numérique, en tournant toujours dans le même sens. Démontrer que : (le tableau est supposé illimité).

1° *La grande diagonale* 1-9 *contient les carrés de tous les nombres impairs ;*

2° *La seconde grande diagonale* 1-17, *ou* 1-33, *contient, d'une part, des carrés de nombres pairs, ces carrés augmentés d'une unité ; d'autre part, les carrés diminués de trois unités des autres nombres pairs ;*

3° *La diagonale* 5-45, *prolongée indéfiniment dans le sens* 5-45 *ne contient aucun nombre premier.*

Ces nombres sont compris dans la formule :

$$16n^2 + 24n + 5 = (4n + 1)(4n + 5).$$

4° *La diagonale* 21-77, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient aucun nombre premier.*

Les nombres de cette ligne sont de la forme :

$$16n^2 + 40n + 21 = (4n + 3)(4n + 7).$$

5° *La diagonale* 97-105, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient, à partir de* 105, *aucun nombre premier.*

Ces nombres sont compris dans la formule :

$$16n^2 + 88n + 105 = (4n + 7)(4n + 15).$$

6° *La diagonale* 137-65, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient, à partir de* 65, *aucun nombre premier.*

Les nombres de cette diagonale sont de la forme :

$$16n^2 + 72n + 65 = (4n + 5)(4n + 13).$$

7° *L'oblique* 1-85, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient aucun nombre premier.*

Les nombres de cette oblique sont de la forme :

$$64n^2 + 20n + 1 = (4n + 1)(16n + 1).$$

On peut multiplier indéfiniment les propositions de ce genre.

465. — *On construit le tableau :*

67	63	59	55	51	
71	19	15	11	47	
75	23	3	7	43	
79	27	31	35	39	
83	87	91	95	99	

qu'on prolonge indéfiniment ; il est analogue au précédent, mais tous les nombres sont augmentés de deux unités.

1° *La diagonale* 3-35, *prolongée indéfiniment dans ce sens, ne contient* (sauf 3) *aucun nombre premier.*

Ces nombres sont de la forme :

$$(4n + 1)(4n + 3).$$

2° *La diagonale* 15-63, *prolongée indéfiniment dans ce sens, ne contient aucun nombre premier.*

Ces nombres sont de la forme :

$$(4n + 3)(4n + 5).$$

On peut multiplier indéfiniment ces propositions négatives.

En disposant de la même manière les termes d'une progression arithmétique quelconque, on peut former une infinité de tableaux analogues aux précédents, et multiplier les remarques analogues. Ces tableaux ne révèlent rien quant à la distribution ou loi des nombres premiers.

466. — *Autour d'un point* P, *pris dans le plan d'une circonférence de centre* O, *tournent deux sécantes dont l'angle reste constant. La droite qui joint les milieux des portions de sécantes comprises à l'intérieur du cercle enveloppe une circonférence dont le centre est le milieu de* OP.

Démonstration géométrique élémentaire.

467. — *On considère un faisceau de trois droites* : OA, OB, OC, *faisant entre elles des angles de* 120° ; *par un point quelconque* M *de leur plan, on mène trois droites parallèles aux premières*

et les rencontrant en $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. *Ces points sont les sommets de deux triangles équilatéraux égaux entre eux, leur côté est égal à* OM. *Ces deux triangles sont symétriques par rapport au milieu de* OM.

Démonstration géométrique élémentaire.

468. — *On prolonge dans un même sens de rotation, et d'une longueur égale à eux-mêmes, les côtés d'un carré, les extrémités de ces lignes sont les sommets d'un nouveau carré sur lequel on agit comme sur le précédent, et ainsi de suite. Démontrer qu'aucun des carrés successifs ainsi obtenus n'a ses côtés parallèles à ceux du carré primitif.*

Le rapport des angles des côtés avec une direction fixe est incommensurable.

469. — a *et* b *étant des angles quelconques, vérifier la formule :*

$$\frac{2(1 - \text{tg a tg b})^2}{\cos^2(\text{a} + \text{b})} = (\sec^2\text{a} + \sec^2\text{b})(1 - \text{tg a tg b})$$
$$+ (\text{tg a} + \text{tg b})(\text{tg a} \sec^2\text{b} + \text{tg b} \sec^2\text{a}).$$

470. — $A_1B_1C_1$ *est le triangle podaire d'un point* $M(x_1, y_1, z_1)$ *du plan du triangle* ABC. *On mène par* A, B, C, *des parallèles respectives à* B_1C_1, A_1C_1, B_1A_1 ; *ces parallèles déterminent un second triangle* A'B'C'. *On demande les coordonnées normales du point* P, *centre d'homothétie de* $A_1B_1C_1$ *et* A'B'C'.

On trouve :

$$\frac{x}{a(x_1 + y_1 \cos C)(x_1 + z_1 \cos B)} = \frac{y}{b(y_1 + x_1 \cos C)(y_1 + z_1 \cos A)}$$
$$= \frac{z}{c(z_1 + x_1 \cos B)(z_1 + y_1 \cos A)}.$$

Si M est O, P est G.

Si M est I, P est le point :

$$x : y : z = \frac{a}{1 + \cos A} = \frac{b}{1 + \cos B} = \frac{c}{1 + \cos C}.$$

Si M est H, P le point :

$$\frac{x}{a \text{ tg } A} = \frac{y}{b \text{ tg } B} = \frac{z}{c \text{ tg } C}.$$

Si M est K, P est le point (coordonnées barycentriques)

$$\frac{\alpha}{7a^4 - (b^2 - c^2)^2} = \frac{\beta}{7b^4 - (a^2 - c^2)^2} = \frac{\gamma}{7c^4 - (a^2 - b^2)^2}.$$

471. — *Lieu des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque* M *d'une droite passant par le centre d'une ellipse sur la polaire de* M.

Le lieu est une hyperbole équilatère de même centre que l'ellipse et dont une asymptote est le diamètre conjugué à OM.

Théorème analogue pour l'hyperbole.

472. — x *et* y *étant des entiers premiers entre eux; les nombres de la forme* : $x^3 \pm 2y^3$, *n'admettent aucun des facteurs premiers* : 7, 13, 19, 37, 61.

473. — x, y, z, *étant des entiers premiers* : 1° *avec* 13; 2° *avec* 7; *les nombres de la forme* : $x^3 \pm y^3 \pm z^3$ *ne sont pas divisibles* : 1° *par* 13; 2° *par* 7.

474. — x *et* y *étant premiers entre eux, les nombres de la forme* : $x^5 \pm 2y^5$ *n'admettent pas le facteur premier* 11.

475. — A, B, C, *étant les angles d'un triangle,* θ *l'angle de Brocard de ce triangle; vérifier l'identité* :

$$5(\cot g^2\theta - 1)\sum \cot g^4 A - 4 \cot g\,\theta \sum \cot g^5 A = \cot g^6\theta - 5 \cot g^4\theta + 10 \cot g^2\theta - 10.$$

476. — M *étant un point d'une hyperbole équilatère de centre* O, N *le point où la normale en* M *rencontre l'axe non transverse; démontrer que l'on a* : OM = MN.

477. — O *étant le point de rebroussement d'une cardioïde,* M *un point quelconque de la courbe,* N, *le point où la normale en* M *rencontre l'axe; démontrer que l'on a* : OM = ON.

478. — *L'équation* : $x^2 - px + q = 0$ *ayant ses racines entières et positives* : 1° *l'expression* : $\frac{p(p+1)}{2} - q$ *est la somme de deux triangulaires*; 2° *l'expression* : $\frac{q}{4}(p + q + 1)$ *est entière et est le produit de deux triangulaires.*

479. — *L'équation* :

$$x^n - A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - A_3x^{n-3} + \ldots \pm A_n = 0.$$

ayant toutes ses racines entières et positives, démontrer que :

1° $\frac{A_1(A_1+1)}{2} - A_2$ *est la somme de* n *triangulaires.*

2° *L'expression :*

$$\frac{A_n}{2^n}(1 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n),$$

est entière et produit de n *triangulaires.*

Ce qui généralise la proposition **478**.

480. — *On considère la suite :*

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = x \ldots\ldots\; u_n = xu_{n-1} + u_{n-2}.$$

Démontrer que x^n est une fonction linéaire de $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$, et que, par suite, un polynôme entier en x de degré n est une fonction linéaire entière de : $u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$.

(Pour le développement de u_n et l'équation différentielle à laquelle cette quantité satisfait, voir : *J. E.* 1895, pages 109 et 129, Ex. 386 et 387).

On trouve :

$$\begin{aligned}
x &= u_1\\
x^2 &= u_2 - u_0\\
x^3 &= u_3 - 2u_1\\
x^4 &= u_4 - 3u_2 + 2u_0\\
x^5 &= u_5 - 4u_3 + 5u_1\\
x^6 &= u_6 - 5u_4 + 9u_2 - 5u_0\\
x^7 &= u_7 - 6u_5 + 14u_3 - 14u_1\\
x^8 &= u_8 - 7u_6 + 20u_4 - 28u_2 + 14u_0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut remarquer que dans le développement de x^n par rapport aux indices décroissants de u, les signes sont alternativement positifs et négatifs, que le dernier terme de x^{2n} a le même coefficient, en valeur absolue, que le dernier terme de x^{2n-1} ; que les développements de x^{2n} et de x^{2n+1} ont le même nombre de termes ; le développement de x^{2n} ne comprend que des u d'indice pair ; celui de x^{2n+1} que des u d'indice impair. Si l'on dispose les coefficients, abstraction faite de leur signe, en un tableau analogue au triangle arithmétique, le coefficient de u_p, dans le développement de x^n est égal au coefficient de u_{p-1} dans x^{n-1}, augmenté du coefficient de u_{p+1} dans le même développement de x_{p-1} ; on peut donc prolonger aisément le tableau précédent. On trouve d'ailleurs pour

le développement de x^n la formule :

$$x^n = u_n - (n-1)u_{n-2} + \frac{n}{1.2}(n-3)u_{n-4} - \frac{n(n-1)}{1.2.3}(n-5)u_{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}(n-7)u_{n-8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5}(n-9)u_{n-10} + \ldots\ldots$$

dont la loi est manifeste.

481. — *Si* N *est entier terminé par* 6 *ou* 8, *le chiffre des centaines de* N^5 *est impair.*

Si N *est terminé par l'unité, le chiffre des mille de* N^5 *est le même que celui qui termine le carré du chiffre des dizaines de* N.

Si N *est terminé par* 9, *le chiffre des mille de* N^5 *n'est ni* 2, *ni* 3, *ni* 7, *ni* 8.

Si N *est terminé par* 2 *ou* 4, *le chiffre des centaines de* N^5 *est pair.*

Deux nombres N *et* N′ *étant terminés par* 1, 3, 7 *ou* 9, *et tels que le chiffre de leurs dizaines soit* 2K *pour l'un et* 2K + 1 *pour l'autre; le chiffre des centaines de* N^5 *est de* N'^5 *est le même.*

482. — *La somme des carrés des* n *premiers nombres, et la somme des* n *premiers triangulaires ne sont jamais terminées par un des chiffres* : 2, 3, 7 *ou* 8.

483. — *Vérifier l'identité* :

$$\frac{4^{n+1}}{\sin^2 2^{n+1}a} - \frac{1}{\sin^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{4}{\cos^2 2a} + \ldots + \frac{4^n}{\cos^2 2^n a}.$$

484. — *Vérifier l'identité :*

$$\frac{\operatorname{cotg} a}{\sin^2 a} - \frac{8^{n+1}\operatorname{cotg} 2^{n+1}a}{\sin^2 2^{n+1}a},$$
$$= \operatorname{tg} a \sec^2 a + 8 \operatorname{tg} 2a \sec^2 2a + \ldots + 8^n \operatorname{tg} 2^n a \sec^2 2^n a.$$

485. — A, B, C, *étant les angles d'un triangle, on a les identités*

$$1^\circ\ 3 + \sum \frac{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos^2 A} = \sum \frac{1}{\cos^2 A} + 3 \sum \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B,$$

$$2^\circ\ 4\left(\sum \operatorname{cotg} A\right)\left(\sum \operatorname{cotg}^3 A\right) - 3 \sum \operatorname{cotg}^4 A = \left(\sum \operatorname{cotg} A\right)^4 - 6,$$

$$3^\circ\ 3\left(\sum \operatorname{tg} A\right)\left(\sum \operatorname{tg}^2 A\right) - 2 \sum \operatorname{tg}^3 A = \left(\sum \operatorname{tg} A\right)^3 - 6 \sum \operatorname{tg} A.$$

486. — A, B, C, *étant les angles d'un triangle, résoudre l'équation :*

$$\frac{1}{x + \cot g A} + \frac{1}{x + \cot g B} + \frac{1}{x + \cot g c} = \frac{1}{\cot g A . \cot g B . \cot g c - x}.$$

487. — *Résoudre l'équation :*

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$$
$$= (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e).$$

488. — *Résoudre l'équation :*

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} (\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + 4 \cos 4x) = 5 \cos 4x.$$

489. — *Résoudre l'équation :*

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} (\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + 4 \sin 4x) = 5 \sin 4x.$$

490. — *Résoudre l'équation :*

$$a(x^2 + 1)^4 + bx(x^2 + 1)^3 + cx^2(x^2 + 1)^2 + bx^3(x^2 + 1) + ax^4 = 0.$$

491. — *Résoudre l'équation :*

$$(x + a + b)^5 = (a + b - x)^5 + (x + a - b)^5 + (x + b - a)^5.$$

492. — *Résoudre l'équation :*

$$(x + a + b)^7 = (a + b - x)^7 + (x + a - b)^7 + (x + b - a)^7.$$

493. — *Résoudre l'équation :*

$$(b + c - a + x)^6 + (c + a - b + x)^6 + (a + b - c + x)^6$$
$$+ (a + b + c - x)^6 = (a + b + c + x)^6 + (a + b - c - x)^6$$
$$+ (b + c - a - x)^6 + (ca + c - b - x)^6.$$

494. — *Résoudre l'équation :*

$$(b + c - a + x)^8 + (c + a - b + x)^8 + (a + b - c + x)^8$$
$$+ (a + b + c - x)^8 = (a + b + c + x)^8 + (a + b - c - x)^8$$
$$+ (b + c - a - x)^8 + (a + c - b - x)^8.$$

495. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{(a + 2b)(2a + b)}{x + a + b} + \frac{3(3a + 2b)(2a + 3b)}{x - a - b}$$
$$+ \frac{(2b - a)(3b - 2a)(3b - a)}{(a - b)(x + a - b)} - \frac{(3a - 2b)(2a - b)(3a - b)}{(a - b)(x - a + b)} = 0.$$

496. — *Eliminer l'angle α entre les équations :*

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = a \operatorname{tg} \alpha.$$

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = \frac{a}{\cos^2 \alpha}.$$

497. — *Vraie valeur, pour* b *tendant vers* a, *des expressions :*

1° $$A = \frac{\sin^m a - \sin^m b}{\cos^n a - \cos^n b},$$

2° $$B = \frac{\sin^m a - \sin^m b}{\operatorname{tg}^n a - \operatorname{tg}^n b},$$

3° $$C = \frac{\operatorname{tg}^m a - \operatorname{tg}^m b}{\operatorname{cotg}^n a - \operatorname{cotg}^n b}.$$

498. — A, B, C *étant les angles d'un triangle, résoudre les équations :*

1° $$\sin A \sin (A - x) + \sin B \sin (B - x) + \sin C \sin (C - x) = 0$$

2° $$\sin A \sin (B + x) \sin (C + x) + \sin B \sin (A + x) \sin (C + x) + \sin C \sin (A + x) \sin (B + x) = 0,$$

3° $$\operatorname{tg} (A + x) \operatorname{tg} (B + x) + \operatorname{tg} (C + x) \operatorname{tg} (A + x) + \operatorname{tg} (B + x) \operatorname{tg} (C + x) = 1.$$

499. — *Résoudre l'équation :*

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)(x - f) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e)(x + f).$$

500. — *Résoudre l'équation :*

$$\begin{vmatrix} -1 & a & b & x \\ a & 1 & 1 & -1 \\ b & -1 & 1 & 1 \\ x & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

501. — *Résoudre l'équation :*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & x \\ 1 & b & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

502. — *Résoudre l'équation :*

$$x^4(a - b) + x(b^4 - a^4) + a^4b - b^4a = 0.$$

503. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{1}{x - a} - \frac{76}{x - 2a} + \frac{534}{x - 3a} - \frac{1084}{x - 4a} + \frac{649}{x - 5a} = 0.$$

EXERCICES

Par M. **Bernès**.

(*Suite*, v. 1897; p. 180).

XXXI. — On considère un triangle ABC et le cercle circonscrit. Une sécante menée par A coupe BC en D et le cercle en E; les polaires de E relativement aux cercles $A(c)$, $A(b)$ rencontrent cette sécante en ε, ε'. Démontrer que D divise BC et $\varepsilon\varepsilon'$ suivant un même rapport. Si $-\frac{m}{n}$ désigne ce rapport, en conclure la relation

$$mb^2 + nc^2 = (m + n)\mathrm{AD.AE}.$$

XXXII. — Si deux points D, D′ se déplacent sur BC sous la condition de rester symétriques l'un de l'autre relativement à un point fixe I de BC, la somme AD.AE + AD′.AE′ reste constante et réciproquement (E, E′ étant les rencontres de AD, AD′ avec la circonférence ABC). Quel doit être le point fixe I pour que cette somme soit nulle?

XXXIII. — Si T est la rencontre de BC et de la tangente en A au cercle ABC, et que les points D, D′ variables sur BC soient conjugués harmoniques l'un de l'autre relativement à T et à un point fixe I de BC, la somme $\frac{1}{\mathrm{AD.AE}} + \frac{1}{\mathrm{AD'.AE'}}$ est constante et réciproquement.

XXXIV. — Si la condition à laquelle on assujettit D, D′ est que TD.TD′ soit constant, le produit (AD.AE)(AD′.AE′) est aussi constant, et réciproquement. Que sont AD et AD′ dans le cas où la valeur constante du produit est égal à b^2c^2? — Montrer que supposer constant le produit TD.TD′ revient à supposer constante l'aire du triangle $\mathrm{AD_1D'}$, où $\mathrm{D_1}$ est symétrique de D relativement à la bissectrice de l'angle A.

XXXV. — Etant donné un triangle ABC et sur BC un point variable D. 1° Trouver le lieu de la rencontre du cercle qui passe par B et D, tangent à BA ; et du cercle qui passe par C et D, tangent à CA. 2° Si ces deux cercles coupent AD en α, α', démontrer que le point E où AD rencontre la circonférence ABC divise $\alpha\alpha'$ dans le rapport suivant lequel D divise BC. 3° Montrer que les circonférences ABα, ACα' sont tangentes.

XXXVI. — AD, AD$'$ sont deux droites isogonales dans le triangle ABC$'$; les deux circonférences qui passent par D et A et sont tangentes l'une à AB l'autre à AC coupent BC en β, γ, et les circonférences analogues relatives à D$'$ coupent BC en β', γ'. 1° Démontrer que les distances $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ sont égales et de même sens : leur expression commune est $\frac{(m+n)^2 AD^2}{mna}$, en désignant par $-\frac{m}{n}$ le rapport suivant lequel D divise BC. 2° Si à D, D$'$ on substitue leurs conjugués harmoniques relativement à BC, les distances $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ conservent la même valeur, mais changent de sens. Cas particulier où D est le milieu de BC.

XXXVII. — Etant donné un cercle ω, d'un point fixe A de ce cercle comme centre on décrit un cercle de rayon ρ variable qui coupe le premier en B et de B comme centre avec le même rayon un cercle qui coupe le cercle A en M, M$'$. 1° Lieu de M et M$'$ lorsque ρ varie. 2° Si B$'$ est la seconde rencontre des cercles ω et A et que C et C$'$ soient les points où B$'$M, B$'$M$'$ coupent la circonférence ω, les distances MC, M$'$C$'$ sont invariables.

XXXVIII. — Un triangle ABC est inscrit dans un cercle O. Par B et C on trace deux cordes quelconques BB_1, CC_1 qui coupent AC, AB en β, γ. Lieu de la rencontre des droites B_1C_1, $\beta\gamma$. Même question en substituant au cercle une conique.

XXXIX. — Etant donné un triangle ABC, par A et B on trace un cercle quelconque qui coupe AC en β, BC en m ; par A et C on trace un autre cercle quelconque qui coupe AB en γ et BC en n. Lieu de la rencontre des cercles A$\beta\gamma$, Amn.

XL. — Par le sommet A du triangle ABC on trace une sécante quelconque coupant BC en α et le cercle ABC en α' ; par A et B on fait passer un cercle quelconque qui coupe BC en β et AC en β'. Lieu de la rencontre des cercles A$\alpha\beta$, A$\alpha'\beta'$.

XLI. — On considère un triangle ABC et le cercle inscrit O. Deux sécantes quelconques menées par B et C se coupent en α et rencontrent AC, AB en M, N ; les tangentes au cercle menées par M N se coupent en β. Démontrer que la droite $\alpha\beta$ passe par un point fixe.

XLII. — Par les sommets A et B d'un triangle ABC on fait passer un cercle quelconque qui coupe BC en m, et par A et C un cercle qui coupe BC en n. La droite Am coupe le second cercle en p, et la droite An coupe la première en q. Démontrer que le cercle Apq passe par un point fixe.

XLIII. — Sur le côté BC d'un triangle ABC on construit un triangle isoscèle LBC ; et on trace par A et B un cercle ω tangent à BL, par A et C un cercle ω' tangent à CL. 1° Lieu de la rencontre de ces cercles, lorsque L se déplace. 2° Si T est la rencontre des tangentes au cercle ABC en B et C, et que par A on trace deux droites coupant ω en P, ω' en P', et dont l'angle (AP, AP') est égal à l'angle (BT, BL) et de même sens, démontrer que la droite PP' passe par un point fixe. 3° Si cette droite coupe de nouveau ω en Q, ω' en Q' faire voir que les cercles APQ', AQP' sont tangents au cercle ABC.

XLIV. — On joint les sommets B, C d'un triangle ABC aux deux extrémités M, N d'un diamètre du cercle ABC. La perpendiculaire en A à AC est coupée en μ, ν par CM, CN ; et la perpendiculaire en A à AB est coupée en μ', ν' par BM, BN. Démontrer que les droites $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ sont perpendiculaires à BC, que m, n étant les rencontres de ces droites avec BC, An et AM sont deux droites isogonales, et de même Am et AN. De plus, les distances Am, An sont proportionnelles à AM, AN ; et les distances $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ sont dans le rapport $\frac{b}{c}$.

XLV. — On considère un triangle ABC et l'un des cercles I tangents aux trois côtés. Trois droites concourantes étant tracées par A, B, C qui coupent les côtés opposés en A_1, B_1, C_1, et les tangentes au cercle I menées par A_1, B_1, C_1 se coupant en α, β, γ (dans l'ordre habituel), démontrer que Aα, Bβ, Cγ rencontrent BC, CA, AB en trois points en ligne droite.

XLVI. — On considère deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ dont les côtés homologues BC et B_1C_1, CA et C_1A_1, AB et A_1B_1 se coupent en D, E, F, et le triangle $\alpha\gamma\beta$ qui a pour sommets les intersections de BC_1 et CB_1, CA_1 et AC_1, AB_1 et BA_1.

1° Faire voir que si les trois droites A_1D, B_1E, C_1F concourent, les trois conjuguées harmoniques de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ relativement aux angles A, B, C concourent aussi au même point que les premières et réciproquement. 2° La condition de ce concours est que les trois points où AA_1, BB_1, CC_1 rencontrent BC, CA, AB soient en ligne droite.

XLVII. — D, E, F étant définis comme dans la question précédente et les coordonnées normales de A_1, B_1, C_1, relativement au triangle ABC pris pour triangle de référence, étant (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), montrer que la condition pour que les trois droites AD, BE, CF concourent, peut prendre la forme

$$(y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - 2x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

En conclure que si AA_1, BB_1, CC_1 coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite, la condition de concours de AD, BE, CF est que les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ soient inscrits dans une même conique; et réciproquement si l'on suppose les deux triangles inscrits dans une même conique, la condition de concours de AD, BE, CF est que AA_1, BB_1, CC_1 coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite.

XLVIII. — Si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont tels que les droites qui joignent les sommets homologues AA_1, BB_1, CC_1 coupent les côtés opposés du premier en trois points en ligne droite et les côtés opposés du second aussi en trois points en ligne droite, les six sommets A, B, C, $A_1B_1C_1$ sont situés sur une même conique; et réciproquement si ces six sommets sont sur une même conique et qu'en même temps les trois points de rencontre avec les côtés opposés de l'un des triangles soient en ligne droite, les trois points de rencontre de ces droites avec les côtés opposés de l'autre sont aussi en ligne droite.

XLIX. — Si dans la question précédente, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, $lx + my + nz = 0$ est l'équation de la droite déterminée par les rencontres de AA_1, BB_1, CC_1 avec BC, CA, AB, $\frac{L}{x} + \frac{M}{y} + \frac{N}{z} = a$, l'équation de la conique que l'on suppose passer par les six sommets. 1° Montrer que la droite déterminée par les rencontres AA_1, BB_1, CC_1 avec B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, a pour équation $Ll^2x + Mm^2y + Nn^2z = 0$. 2° Les côtés homologues de ABC, $A_1B_1C_1$ se coupant en D, E, F, les droites AD, BE, CE concourent en un point situé sur la conique $\frac{L}{x} + \frac{M}{y} + \frac{N}{z} = 0$ et sur la conique $\frac{1}{lx} + \frac{1}{my} + \frac{1}{nz} = 0$. Et les droites A, D, B, E, C, F concourent en un point situé sur la conique $\frac{L}{x} + \frac{M}{y} + \frac{N}{z} = 0$ et sur la conique $\frac{lL^2}{x} + \frac{mM^2}{y} + \frac{nN^2}{z} = 0$.

L. — Si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont circonscrits à une même conique et que D, E, F étant les points de rencontre des côtés homologues BC et B_1C_1, CA et C_1A_1, AB et A_1B_1, les trois droites AD, BE, CF soient concourantes. 1° Il en est de même des droites A, D, B, E, C, F. 2° Les points où AA_1, BB_1, CC_1 rencontrent BC, CA, AB sont en ligne droite, et aussi les points où ces lignes rencontrent B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.

3° Les six sommets A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont situés sur une même conique.

4° Si ABC étant pris pour triangle de référence (x_1, y_1, z_1) est le point de concours de AD, BE, CF et $(Lx)^{\frac{1}{2}} + (My)^{\frac{1}{2}} + (Nz)^{\frac{1}{2}} = 0$, l'équation de la conique tangente aux six côtés, le point de concours de A, D, B, E, C, F est (Lx_1^2, My_1^2, Nz_1^2); les rencontres de AA_1, BB_1, CC_1, avec BC, CA, AB sont sur la droite $\sum \frac{x}{x_1(My_1 - Nz_1)} = 0$, et leurs rencontres avec B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sur la droite $\sum \frac{Lx}{My_1 - Ny_1} = 0$; enfin la conique circonscrite aux deux triangles a pour équation $\sum \frac{Lx_1^2(My_1 - Nx_1)}{x} = 0$.

EXERCICES

34. — *On a un point fixe sur chacun des côtés d'un angle donné* A. *On place* A *dans une position arbitraire en faisant toujours passer ses côtés par les points qu'ils contiennent. La droite, qui réunit les points de rencontre des côtés de ces deux angles, passe par un même point quelle que soit la position donnée à* A. (M).

35. — *Un triangle est partagé en deux parties équivalentes par les droites qui vont du centre du cercle circonscrit aux extrémités d'une hauteur.* (M).

36. — *On donne un tétraèdre* abcd *tel que les perpendiculaires abaissées de* a *et de* b *sur* cd *se rencontrent en* g *sur cette arête. Démontrer que les plans qui passent par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre et respectivement par les droites* ab, ag, bg *partagent le tétraèdre en deux parties équivalentes.* (M).

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie dirigée par G. Fontené. Agrégé de l'Université, professeur au Collège Rollin.

Je m'étais promis de rendre compte, avec quelques détails, de ce livre qui, dans les quelques pages qui le composent, renferme tant de choses utiles. Mais le temps me fait défaut en ce moment pour faire cette analyse avec le soin qu'elle mérite et, avec ce numéro, cesse ma collaboration au Journal. J'adresse ici, à ce propos, à tous ceux qui m'ont soutenu dans la tâche que je n'abandonne pas sans un très vif chagrin, l'expression de mon affectueuse reconnaissance.

Je me borne donc à dire que l'ouvrage de M. Fontené, bien ordonné, clairement rédigé, résume, d'une façon qui me paraît propre à éclairer les esprits les plus rebelles, les principes, aujourd'hui classiques, relatifs à l'orientation des figures. On ne peut faire une certaine Géométrie, si les éléments qui composent la figure considérée : les droites, les circonférences, les plans, ne sont pas orientés. Tout le monde en tombe d'accord, et l'on sait qu'il faut donner, pour qu'une figure de géométrie soit bien définie, en même temps que ses éléments géométriques, l'orientation qu'ils doivent avoir.

On écrit $\overline{AB}$ pour exprimer que le segment AB est orienté de A vers B,

c'est-à dire pour exprimer que les segments considérés, sur la droite indéfinie qui passe par les deux points A, B, sont comptés comme positifs quand ils sont parcourus dans le sens du mobile partant de A pour aller en B. Cette notation est lourde et elle me paraît inutile. Comme je l'ai dit à M. Fontené, et il partage je crois cette opinion, en écrivant AB, sans autre signe, on peut convenir, une fois pour toutes, que cela veut dire *chemin parcouru sur la droite orientée par le mobile allant de* A *vers* B. Du moment que la droite est orientée, il y a superfétation à écrire $\overline{AB}$; mais il faut que la convention soit formelle et qu'on inculque aux élèves la différence essentielle qu'il convient de faire entre les deux écritures AB, BA.

G. L.

BACCALAURÉAT
DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE
(*LETTRES-SCIENCES*)

Académie de Paris.

(Session de juillet 1897).

Problème obligatoire. — On donne un cône circulaire droit, dont la base a pour rayon R et dont la hauteur est h. On propose de couper ce cône par un plan de façon que la section soit parabolique, et de déterminer le point du diamètre de base perpendiculaire à la trace du plan sécant par lequel il faut conduire ce plan sécant pour que la section ait une surface maxima. Faire ensuite à main levée l'épure de la section en plaçant la base du cône sur le plan horizontal de projection et en inclinant la trace horizontale du plan sécant de 45° sur la ligne de terre.

Questions à choisir. — 1° Inégalité des jours et des nuits.

2° Lois de Képler. — Principaux astronomes avec leurs découvertes.

3° Mesure du temps. — Jour solaire vrai ; jour solaire moyen.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE
(*LETTRES-MATHÉMATIQUES*)

(PREMIÈRE SESSION).

Problème obligatoire. — Soient a, b, c les côtés d'un triangle, p le demi-périmètre ; A, B, C les volumes engendrés par la rotation du triangle autour de chacun de ses trois côtés (A par exemple sera le volume engendré par le triangle tournant autour du côté a). On donne A, B, C et l'on demande de calculer : 1° les rapports $\frac{a}{p} = \alpha$, $\frac{b}{p} = \beta$, $\frac{c}{p} = \gamma$; 2° les trois côtés a, b, c.

Questions à choisir. — 1° Démontrer qu'un nombre est décomposable d'une manière et d'une seule en facteurs premiers ; 2° théorie du plus grand commun diviseur ; 3° démontrer que la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré par fait est incommensurable.

(DEUXIÈME SESSION).

Problème obligatoire. — Couper une sphère de rayon R par un plan situé à une distance x du centre, de telle façon que l'aire de la section faite par ce plan dans la sphère soit égale à m fois la différence des aires des deux calottes sphériques déterminées par le plan sur la surface de la sphère. Discussion.

Questions à choisir. — 1° Propriété de la tangente à la parabole. Démonstration.

2° Propriété de la sous-normale de la parabole. Démonstration.

3° Mener à une parabole une tangente par un point donné du plan de la courbe. Discussion.

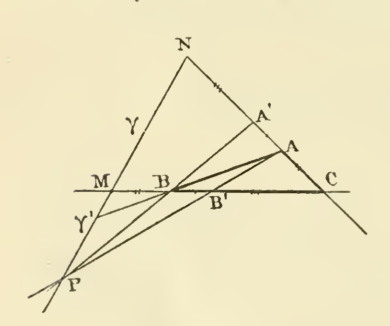
QUESTION 700

Solution, par M. Francis DAUZATS, soldat au 51e de ligne.

On donne un triangle ABC; *sur* BC, *dans le sens* BC, *on porte* $BB' = t$; *sur* CA *dans le sens* CA, $AA' = t$. *En supposant t variable, trouver le lieu décrit par le point de concours des droites* AB', BA'.

Ce lieu est une droite γ; *elle rencontre* AB *en* γ'. *En considérant les points analogues* α', β', *on demande de démontrer que les trois points sont en ligne droite.* (G. L.)

1° Les rayons AB' et BA' se correspondent homographiquement.



Le lieu de P est donc une conique. Pour $t = 0$, on voit que la droite AB fait toute entière partie du lieu. Donc, en dehors de cette droite, le lieu est une seconde droite γ.

2° Les points M et N où γ coupe BC et AC sont tels que

$BM = AC = b \quad AN = BC = a.$

D'après le théorème de Menelaüs, on a :

$$\frac{\gamma' A}{\gamma' B} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1, \qquad \text{d'où } \frac{\gamma' A}{\gamma' B} = \frac{a}{b}, \text{ car } MC = NC.$$

De même, on aurait

$$\frac{\alpha'B}{\alpha'C} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\beta'C}{\beta'A} = \frac{c}{a}.$$

Donc

$$\frac{\alpha'B}{\alpha'C} \cdot \frac{\beta'C}{\beta'A} \cdot \frac{\gamma'A}{\gamma'B} = 1,$$

ce qui prouve que $\alpha'\beta'\gamma'$ sont en ligne droite.

Nota. — Solutions diverses par MM. GOYENS; L'HUILLIER; DROZ-FARNY.

QUESTIONS PROPOSÉES

811. — Dans tout triangle rectangle, le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits, a pour longueur l'hypoténuse du triangle donné.

(*E. N. Barisien*).

812. — On donne un triangle *abc* et le cercle qui lui est circonscrit. D'un point p, de ce cercle, on élève une perpendiculaire à la droite pa, elle coupe bc en a'. De même, on a un point b' sur ac. Démontrer que la droite $a'b'$ passe par le centre du cercle.

(*Mannheim*).

813. — On considère un triangle rectangle BAC, l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle inscrit forme avec les côtés AB, AC de l'angle droit BAC un triangle dont l'aire est dans un rapport constant, quel que soit le triangle rectangle considéré BAC, avec l'aire du cercle inscrit. *G. L.*

814. — Un triangle de grandeur invariable se déplace de façon que deux de ses sommets restent sur deux droites données et que le troisième sommet reste sur un plan parallèle aux deux droites : on demande le lieu de ce troisième sommet? (*Mannheim*).

815. — La circonférence décrite sur le côté BC du triangle ABC, comme diamètre, coupe la hauteur AA′ du même côté de BC que le sommet A, en α. On aura, de même, sur les autres hauteurs, les points β et γ. Les droites $B\gamma$ et $C\beta$ se coupent en α'. Soient, de même, les points β' et γ'. Les triangles ABC et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont homologiques; le centre d'homologie est le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. (*Droz-Farny*).

816. — On considère tous les quadrilatères harmoniques ABCD dans lesquels AB est fixe, CD passant par un point fixe P de AB. Lieu des sommets C, D? (*Droz-Farny*).

817. — On donne une circonférence O et la tangente Δ au point A. Soit A′ le point de O, diamétralement opposé à A.

On construit une parabole P variable dont le foyer F est sur O et qui admet Δ comme directrice.

Quel est le lieu géométrique des points d'intersection de la corde FA′ avec P? (*Droz-Farny*).

818. — Etant donné un triangle ABC, le cercle exinscrit dans l'angle A a son centre en O_A et touche le côté BC en A′. Montrer que la droite O_AA' et les droites analogues O_BB', O_CC' concourent au centre du cercle circonscrit au triangle $O_AO_BO_C$.

(*E.-N. Barisien*).

819. — Les droites qui joignent le centre I du cercle inscrit à un triangle ABC aux sommets de ce triangle, rencontrent le cercle circonscrit en A′,B′,C′. Démontrer la relation

$$\frac{IA'}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{IB'}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{IC'}{\sin\frac{C}{2}} = 2R,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit. (*E.-N. Barisien*).

820. — Soient le centre O et deux diamètres fixes rectangulaires AA′ et BB′ d'un même cercle. On considère deux rayons variables perpendiculaires OC et OD.

1° Le lieu du point de rencontre M des droites AC et BD est un cercle Σ.

2° Le lieu du point de rencontre M′ des droites A′C et B′D est le cercle Σ.

3° Le lieu du milieu de MM′ est un cercle.

4° La droite MM′ passe par la projection de C sur BB′ et par la projection de D sur AA′.

5° Les quatre points M, M′, C, D et O sont sur un même cercle.

(*E.-N. Barisien*).

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE, 1897

Arithmétique et Algèbre

Géométrie

Trigonométrie

Baccalauréats

Mélanges et Correspondances

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

ST-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE FRÈRES

